

Les triangles à quoi ça sert ?

Monique Teillaud

<http://www.inria.fr/sophia/members/Monique.Teillaud/>



Collège Le Pré des Roures

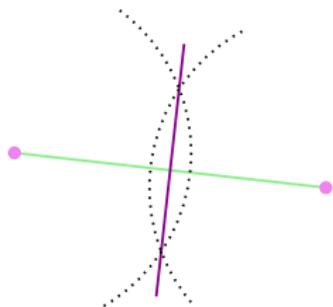
Première partie I

Un petit peu de géométrie

Cercle circonscrit

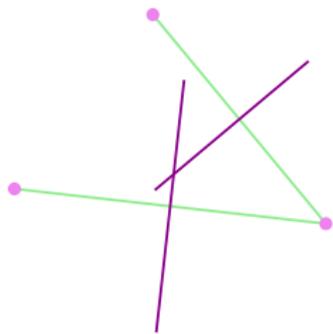


Cercle circonscrit

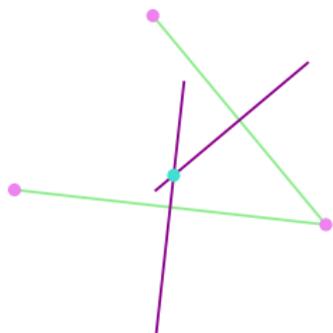


médiatrice =
{points équidistants}

Cercle circonscrit

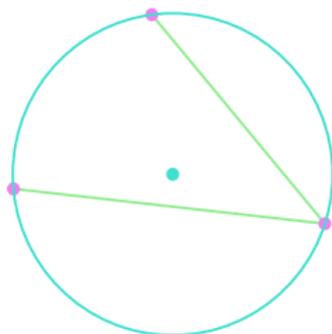


Cercle circonscrit



intersection =
point équidistant
aux 3 sommets

Cercle circonscrit



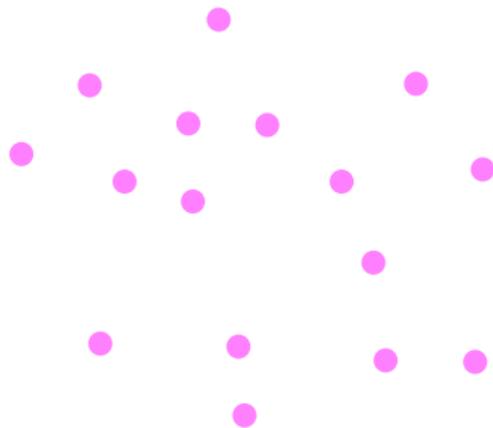
intersection =
point équidistant
aux 3 sommets

Deuxième partie II

Triangulation de Delaunay

Définitions

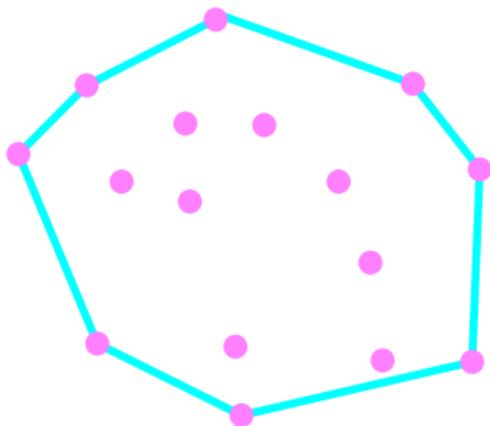
Dans le plan



Ensemble de points

Définitions

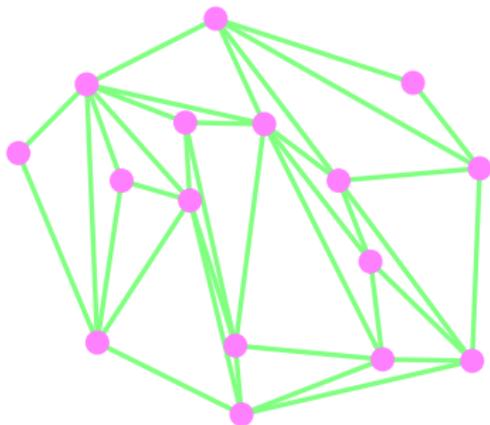
Dans le plan



Enveloppe convexe

Définitions

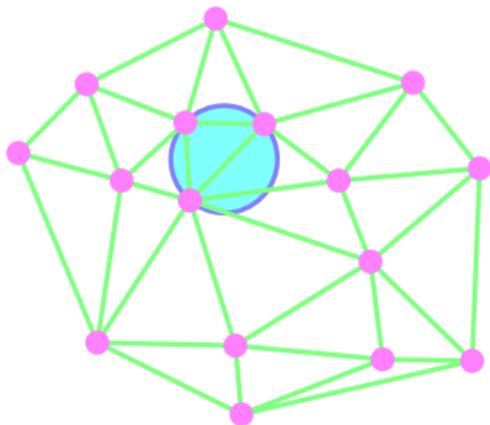
Dans le plan



Triangulation

Définitions

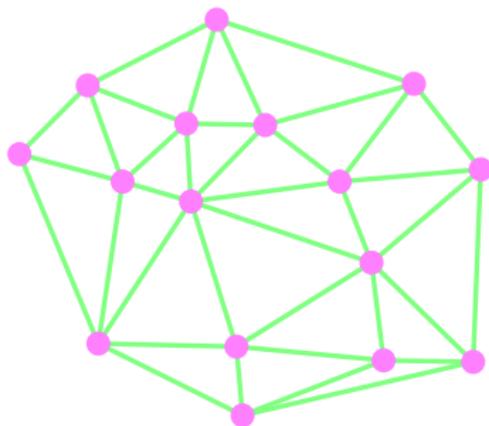
Dans le plan



Triangulation de Delaunay

Définitions

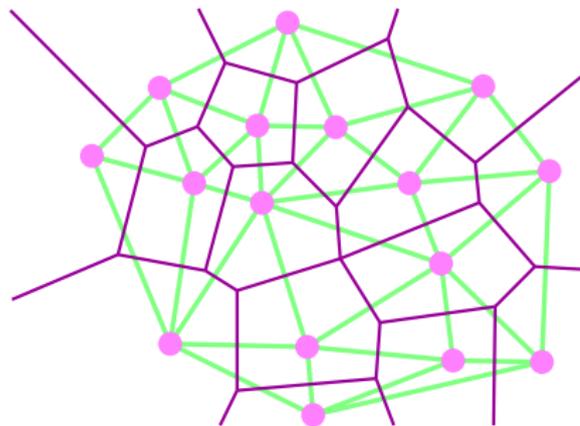
Dans le plan



Triangulation de Delaunay

Définitions

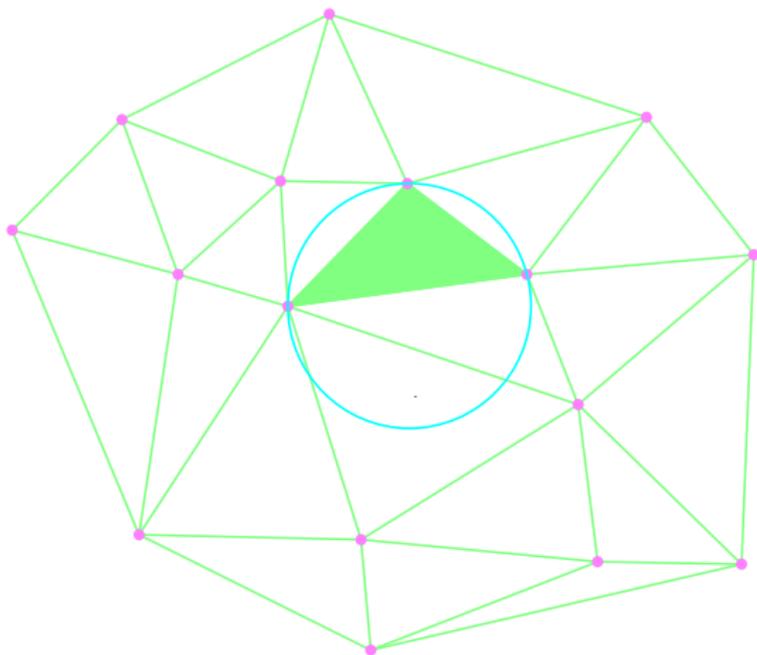
Dans le plan



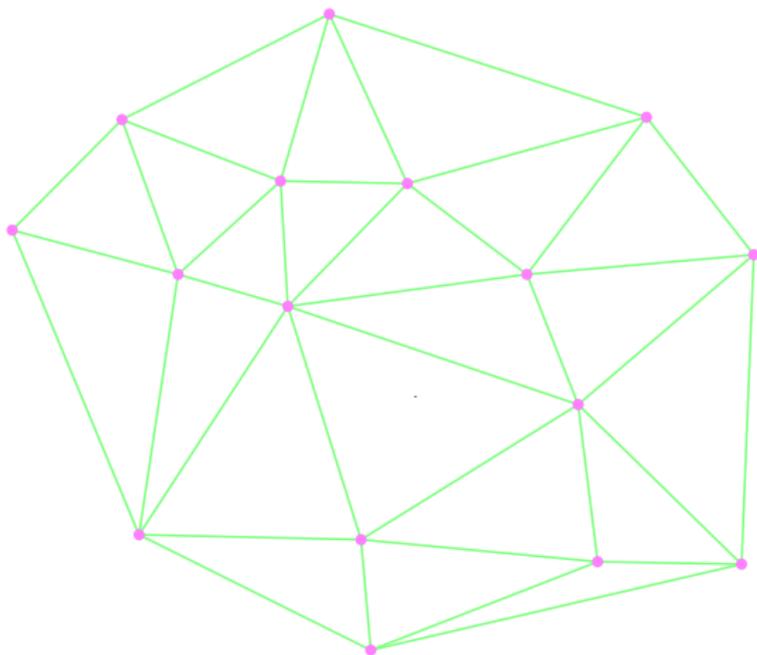
dual : diagramme de Voronoï



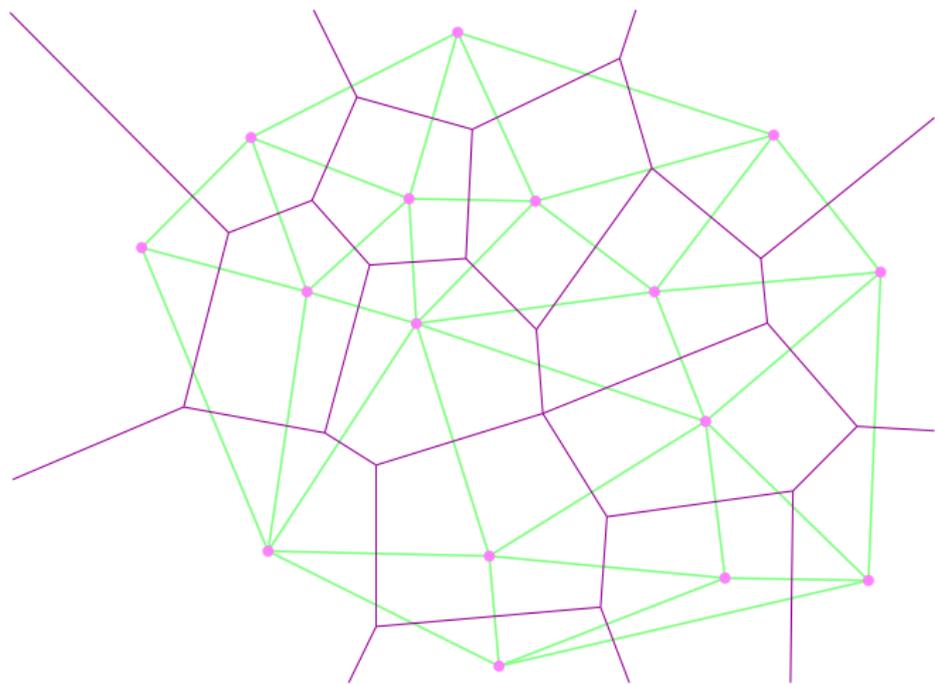
Points



Triangulation de Delaunay : disques vides



Triangulation de Delaunay



dual = Diagramme de Voronoï

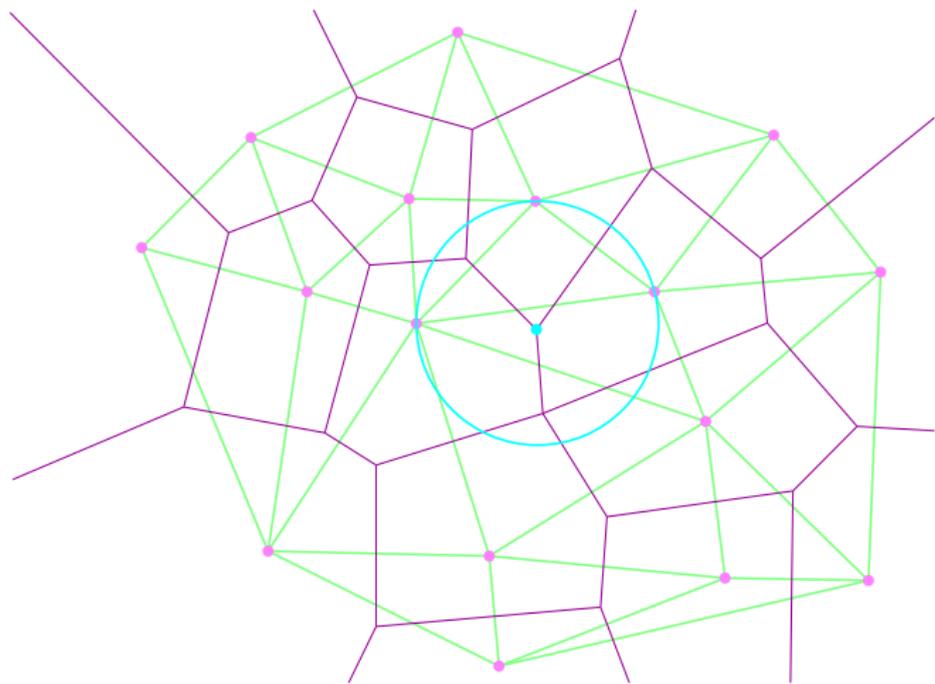


Diagramme de Voronoï : sommets = centres des disques vides

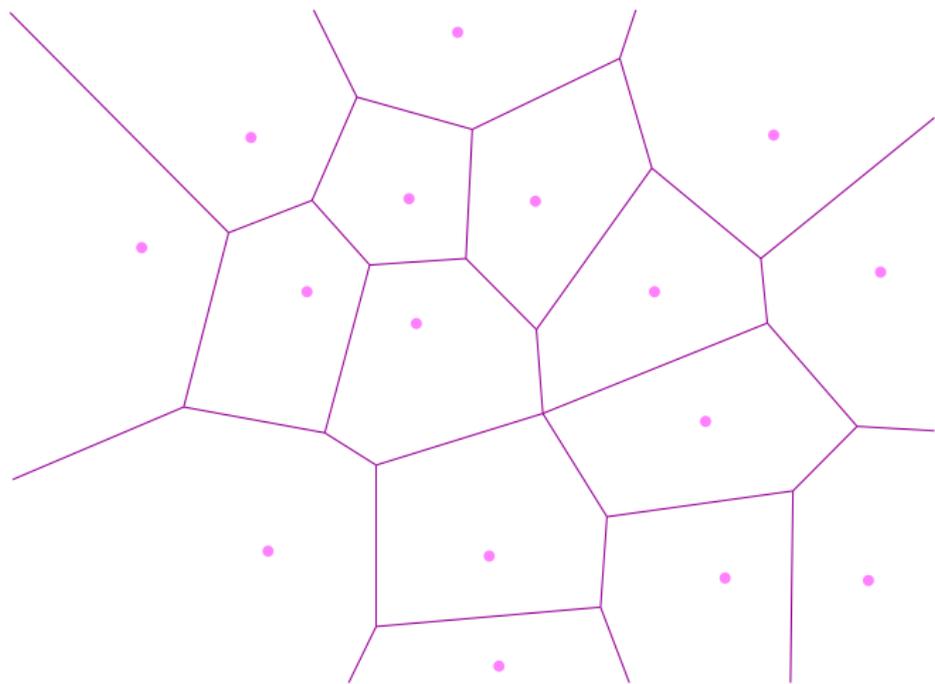


Diagramme de Voronoï

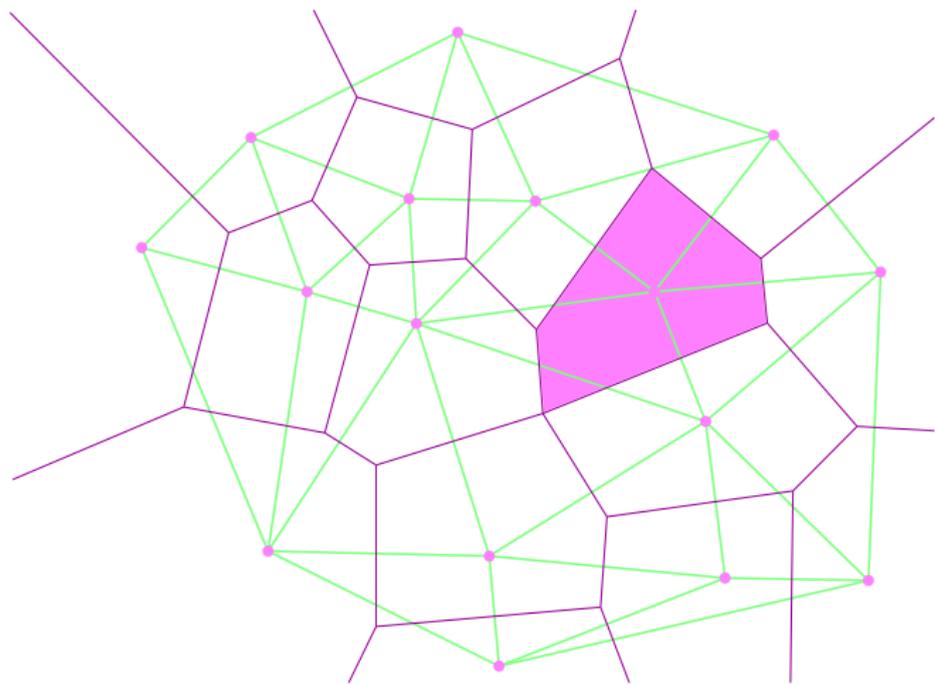


Diagramme de Voronoï : cellules convexes

Troisième partie III

Dans la nature



photo Chris Wu





photo Andreas Fabri





photo Mathematical Association of America

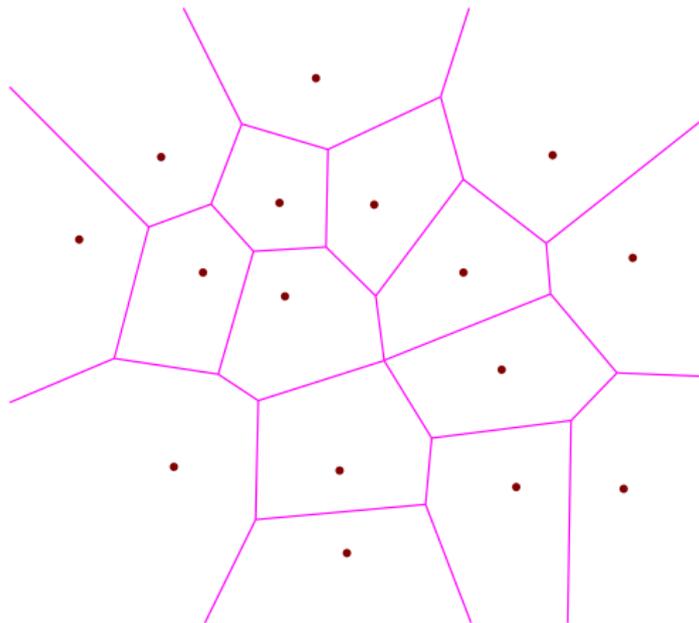


photo Argonne National Lab, MCS division, USA

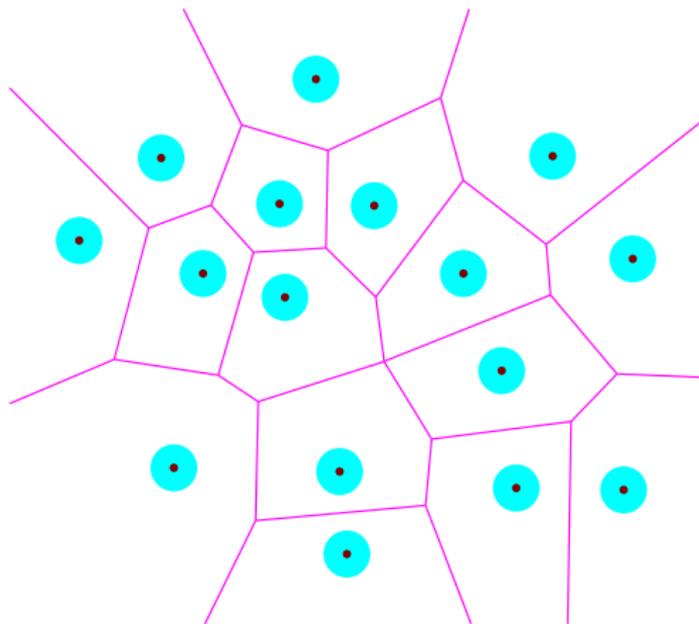


photo IMPA, Brasil

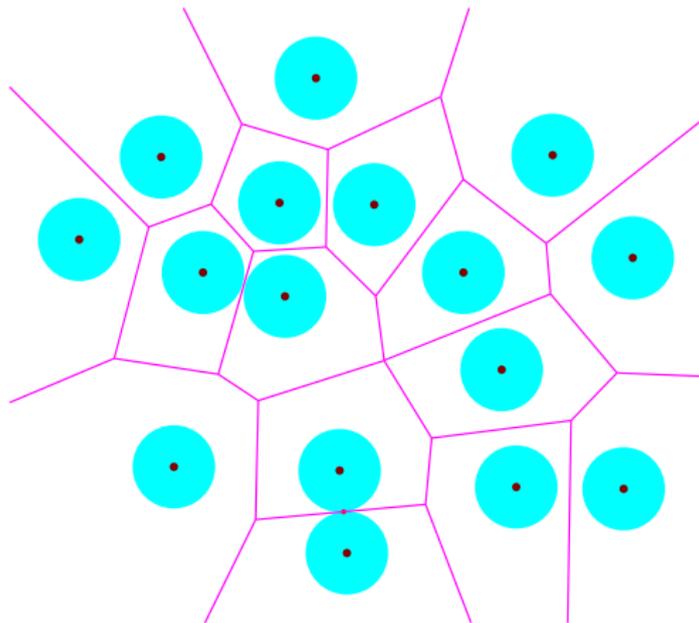
Modèle de croissance



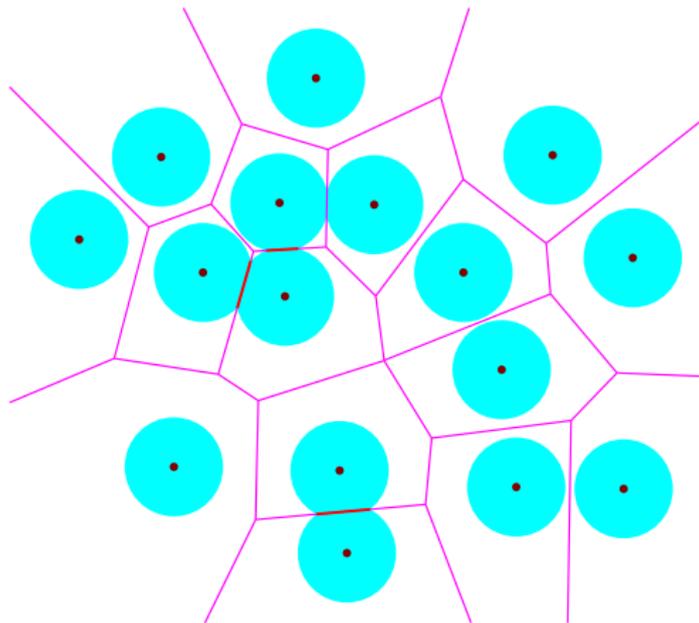
Modèle de croissance



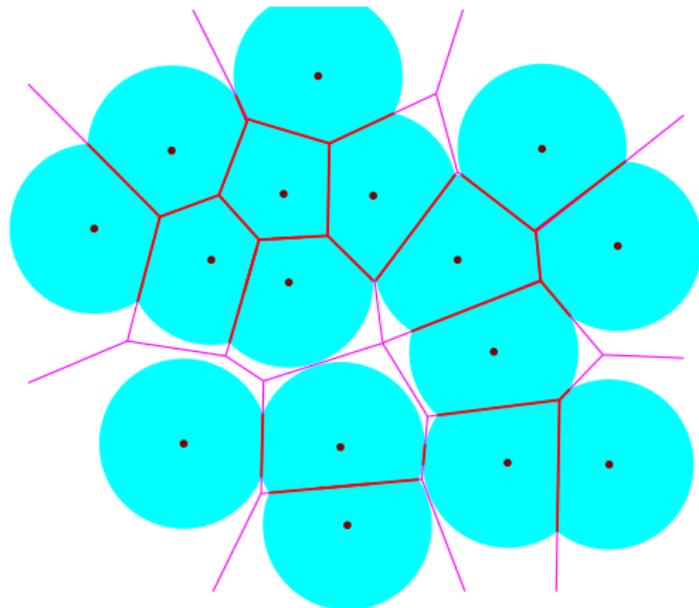
Modèle de croissance



Modèle de croissance



Modèle de croissance



Quatrième partie IV

Algorithmes

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =
suite **finie** d'opérations
permettant de **construire** la réponse à un problème

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =

suite **finie** d'opérations

permettant de **construire** la réponse à un problème

*nom latinisé de
Al-Khawarizmi, mathématicien Perse, 8^{ème} siècle*

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =

suite **finie** d'opérations

permettant de **construire** la réponse à un problème

Exemple : recette de cuisine

- mettre 200 g de farine dans un bol
- ajouter 150 g de sucre
- mélanger avec 2 œufs
- ajouter 3 verres de lait
- ...

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =
suite **finie** d'opérations
permettant de **construire** la réponse à un problème

Algorithme **incrémentiel**
les données sont insérées une par une

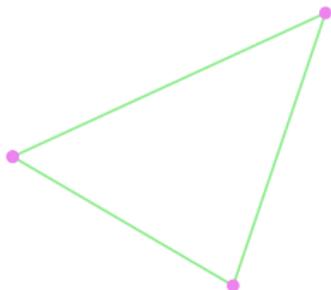
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



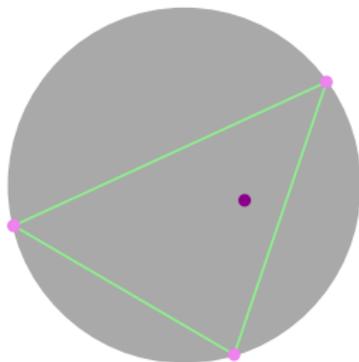
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



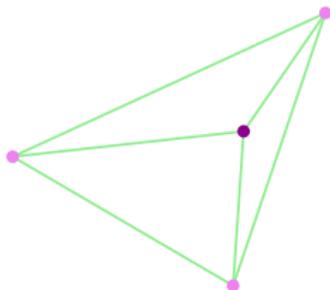
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



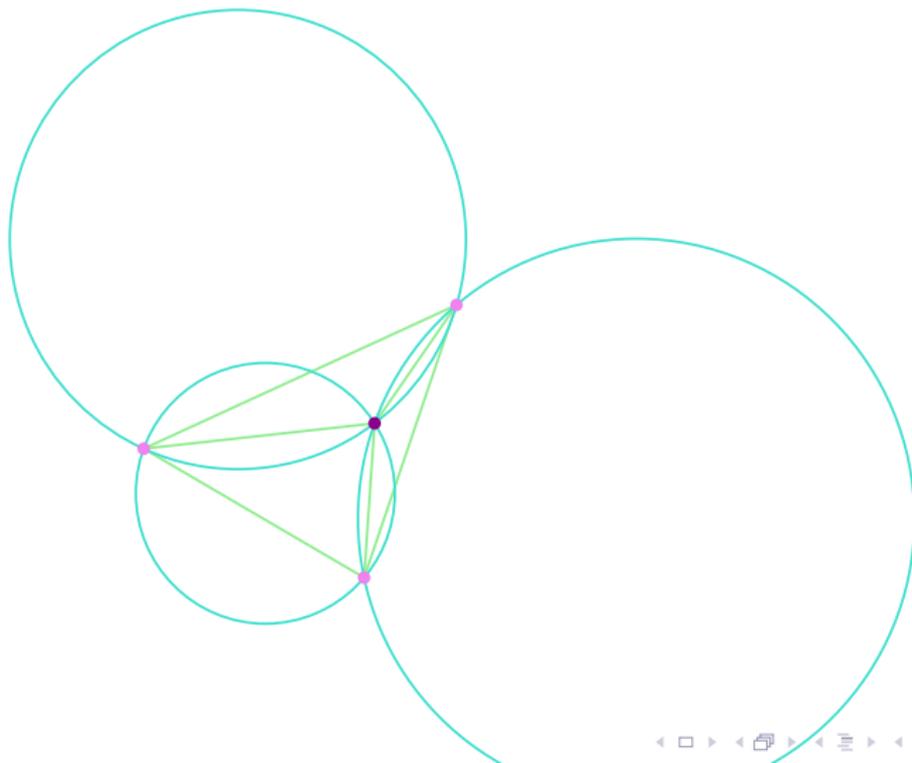
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



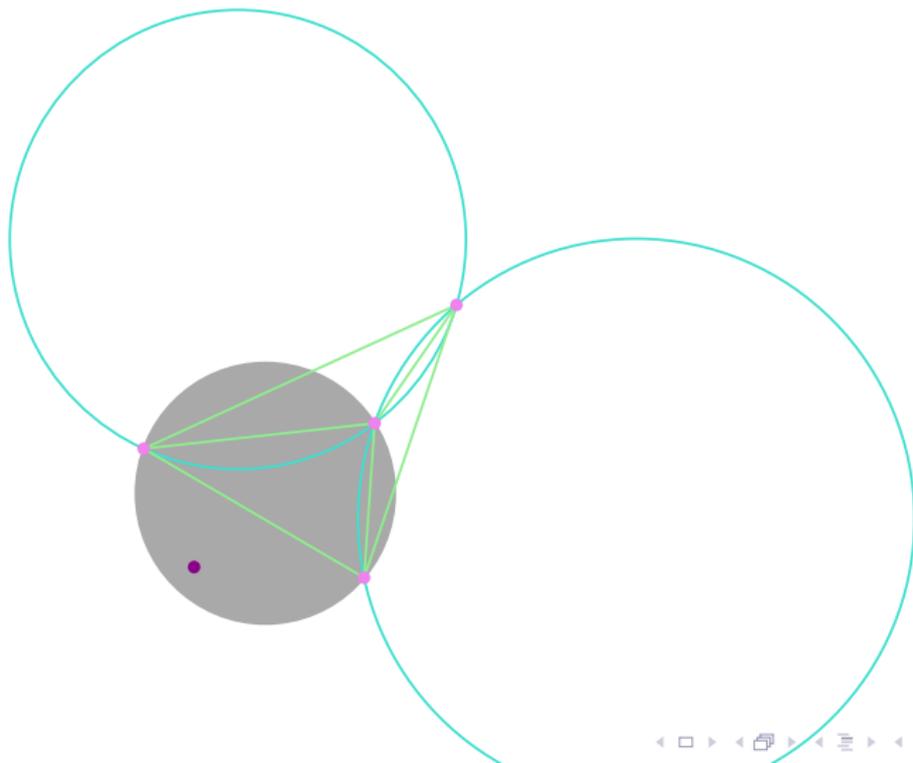
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



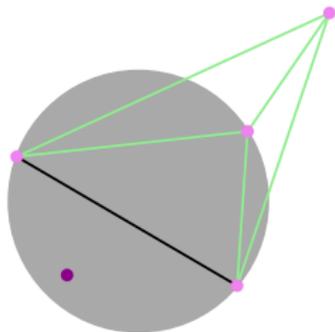
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



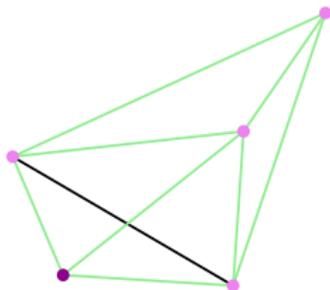
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



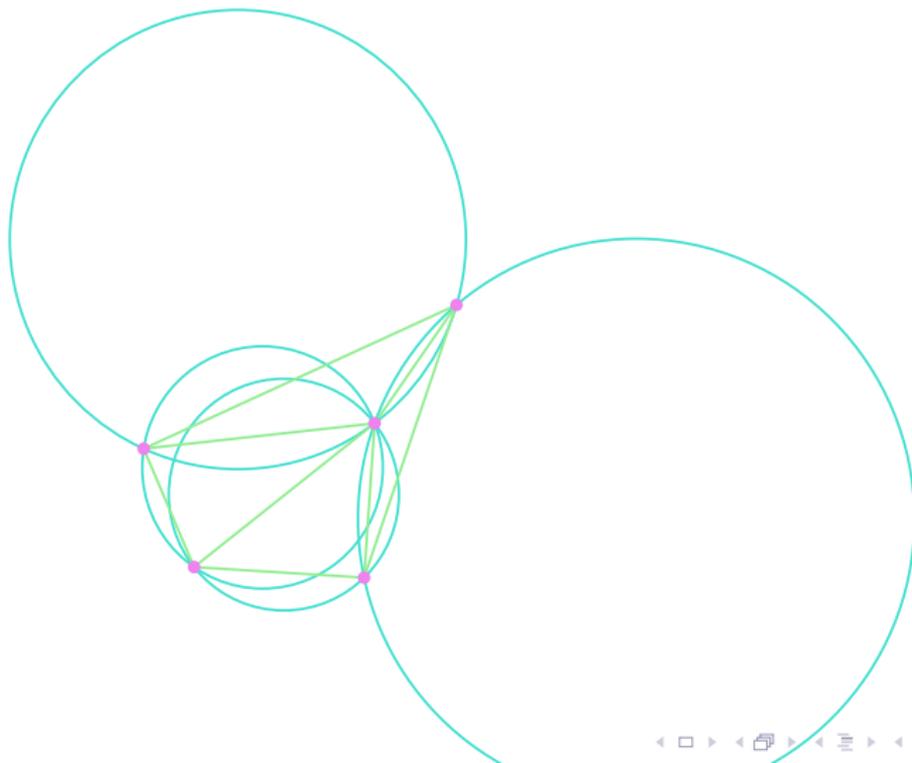
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



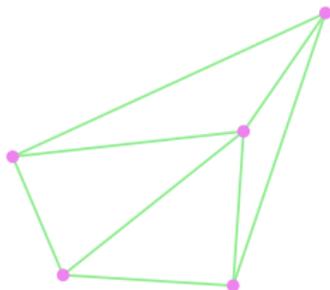
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



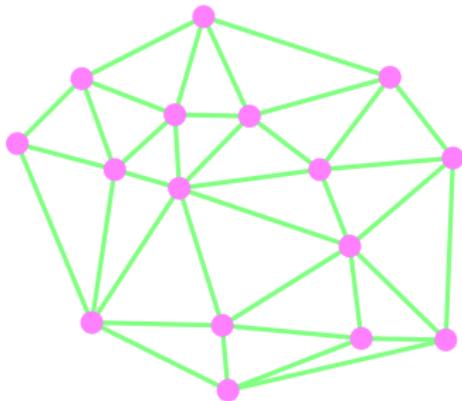
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :

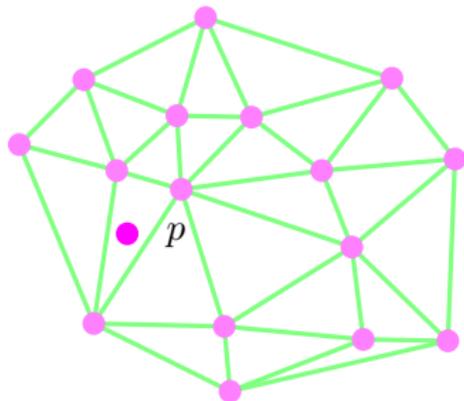


Algorithme :

Pour chaque point p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



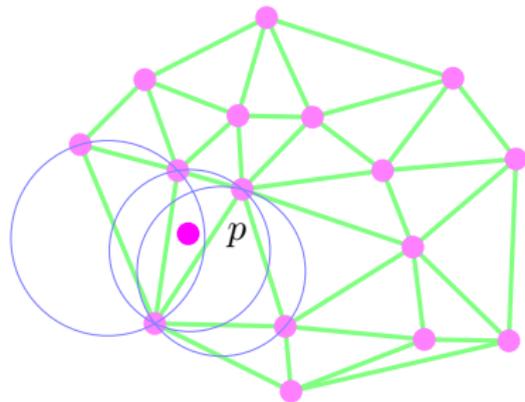
Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles **en conflit** avec p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



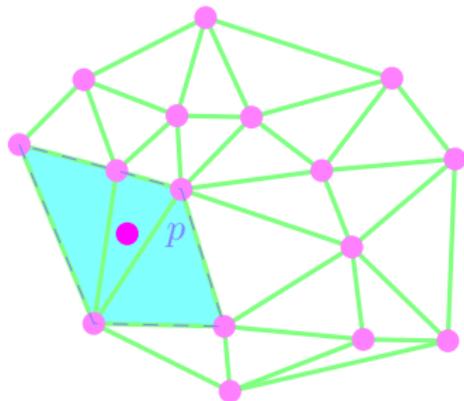
Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles **en conflit** avec p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



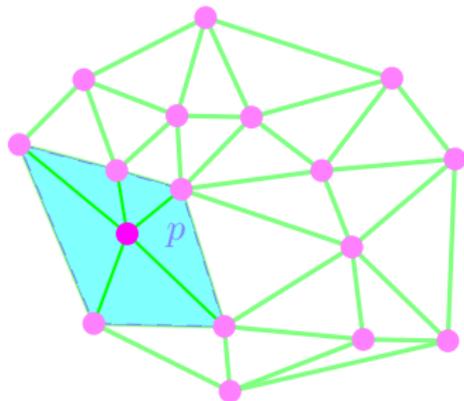
Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles **en conflit** avec p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles **en conflit** avec p
- étoiler la région autour de p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des dizaines

de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des centaines de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des

milliers !

de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des

millions !! de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des

millions !! de points ?

... on écrit un programme

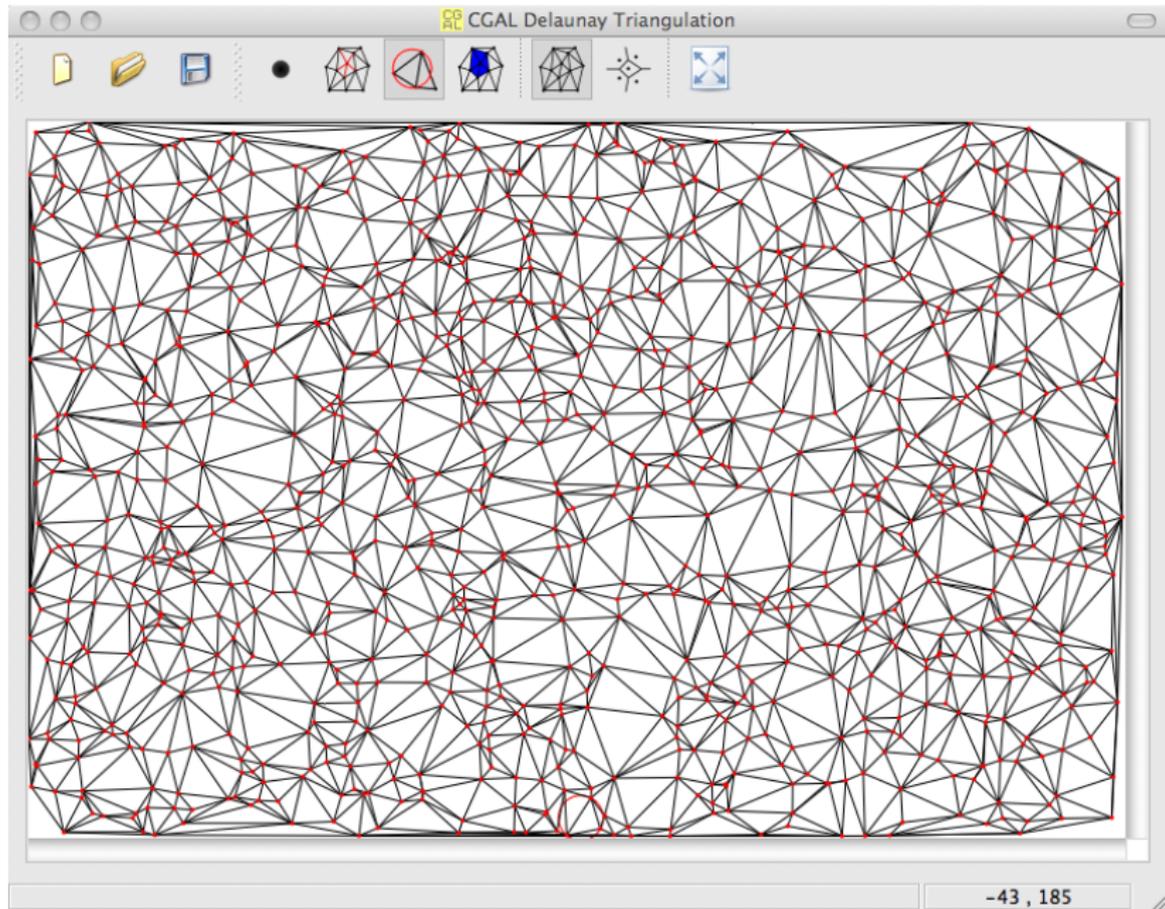
Calcul de la triangulation de Delaunay

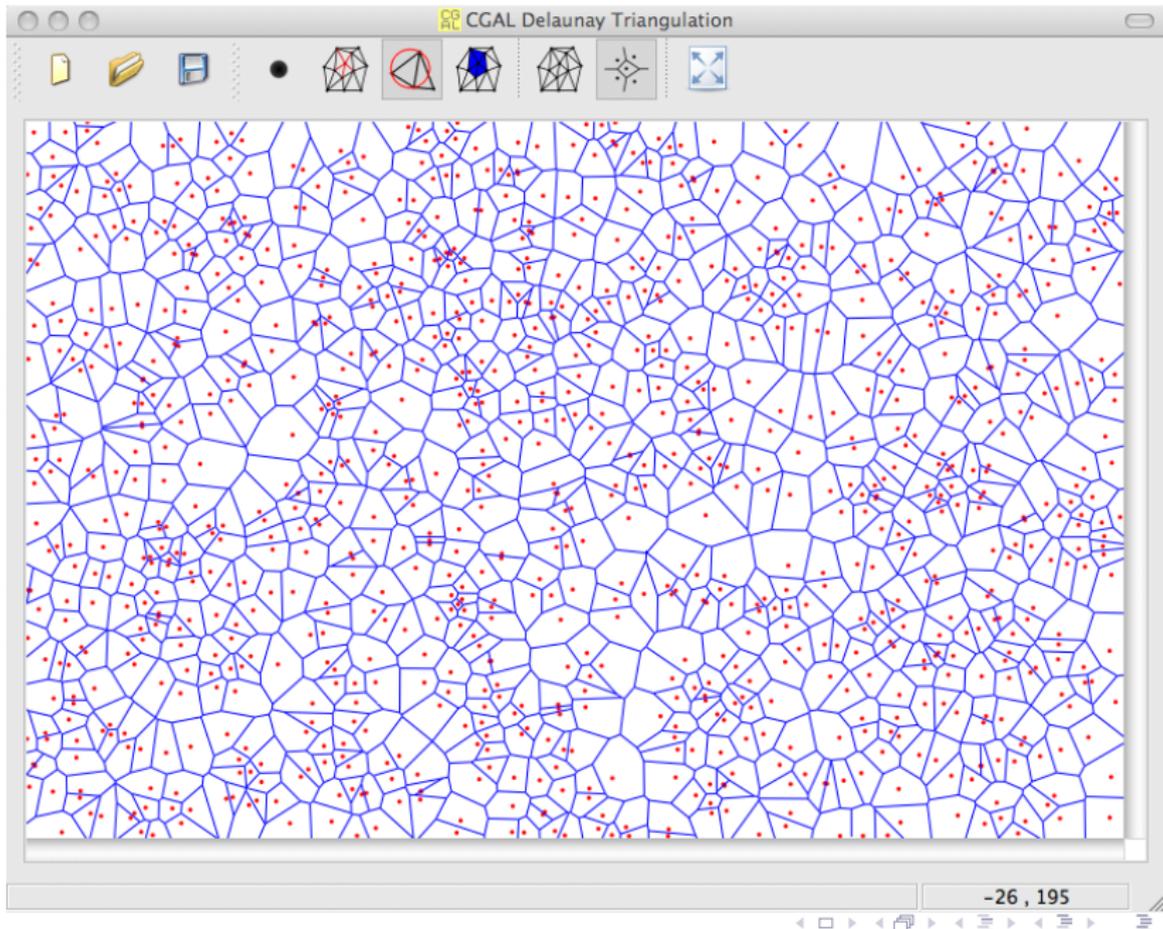
Et avec des

millions !! de points ?

... on écrit un programme

l'ordinateur calcule !





Cinquième partie V

Complexité

Qu'est-ce que c'est ?

Nombre d'opérations élémentaires effectuées par l'algorithme

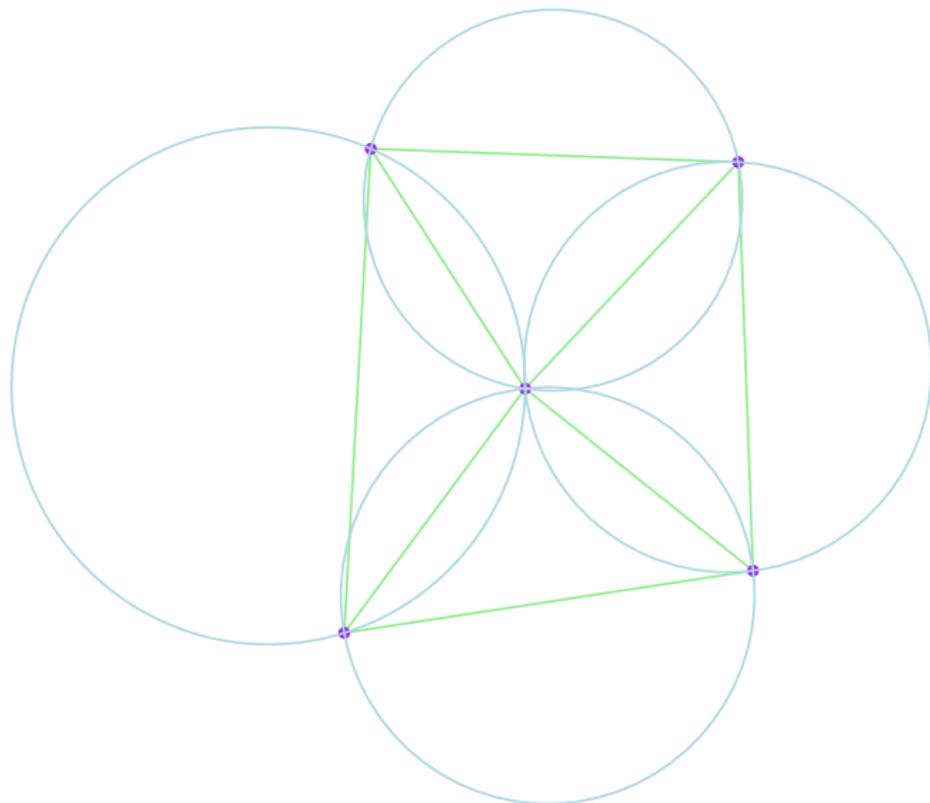
—→ pour évaluer le temps de calcul

Exemple



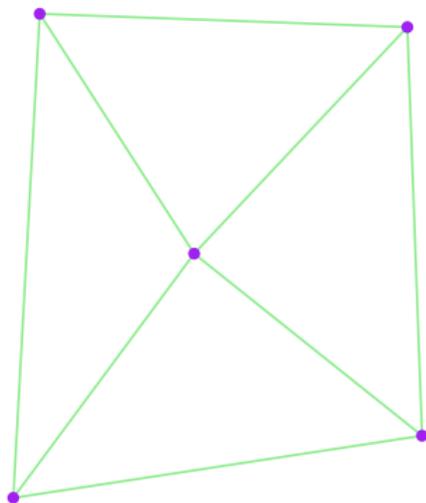
5 points

Exemple

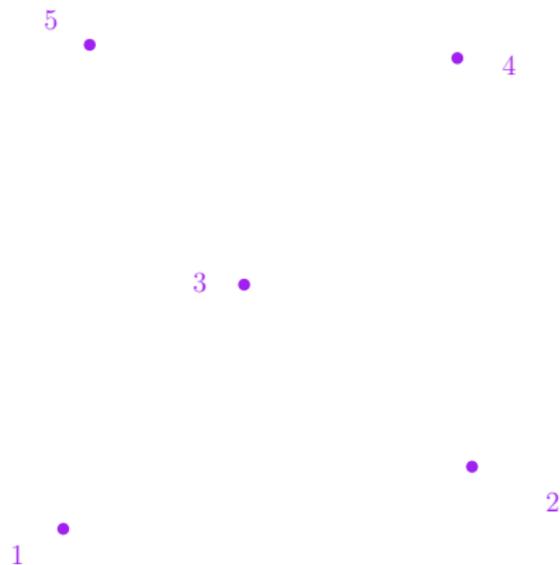


4 triangles

Exemple

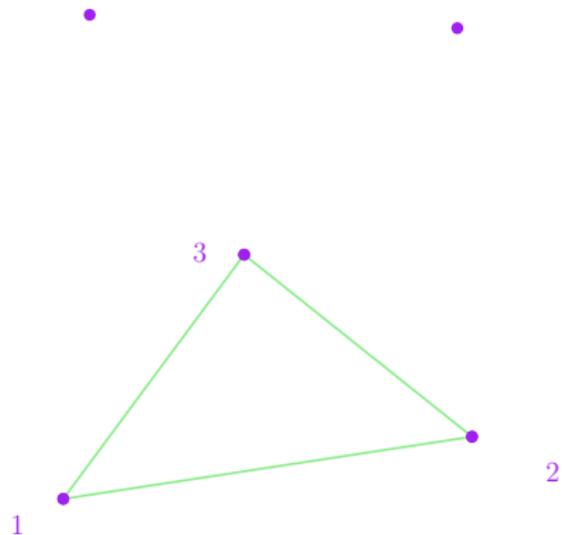


Exemple



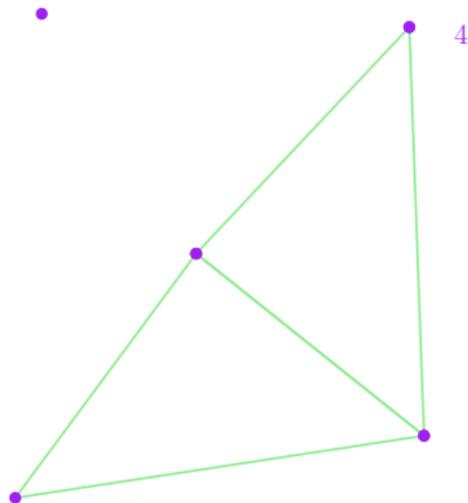
on insère les points dans un premier ordre

Exemple



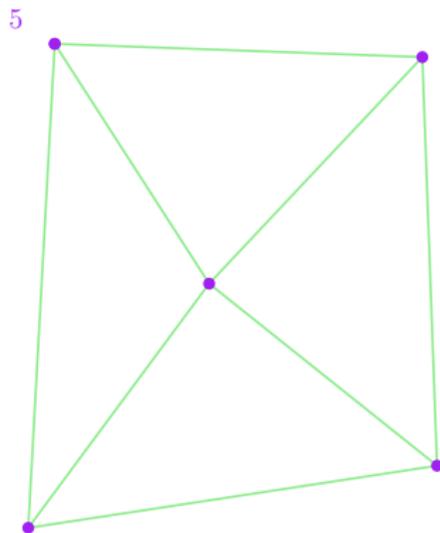
3 points \rightarrow 1 triangle construit

Exemple



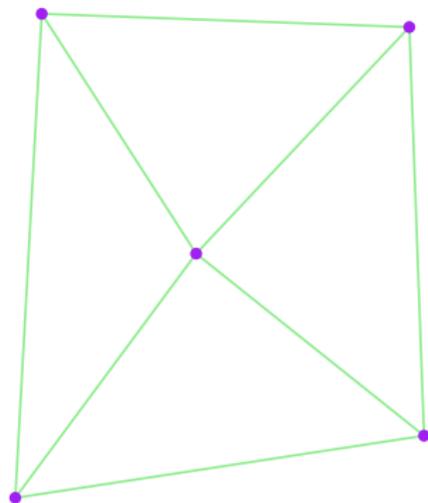
4 points \rightarrow 1 nouveau triangle construit

Exemple



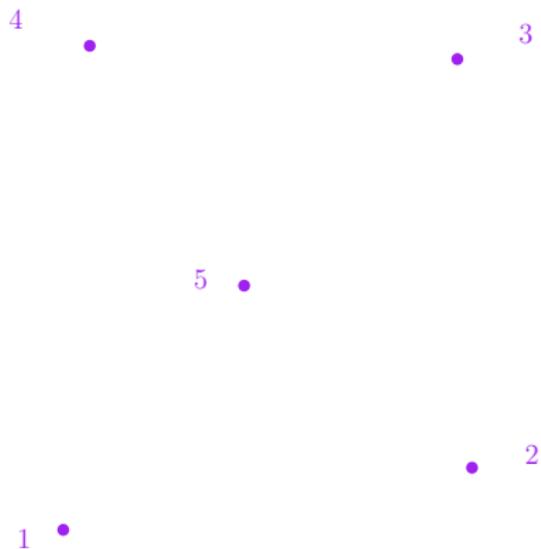
5 points \rightarrow 2 nouveaux triangles construits

Exemple



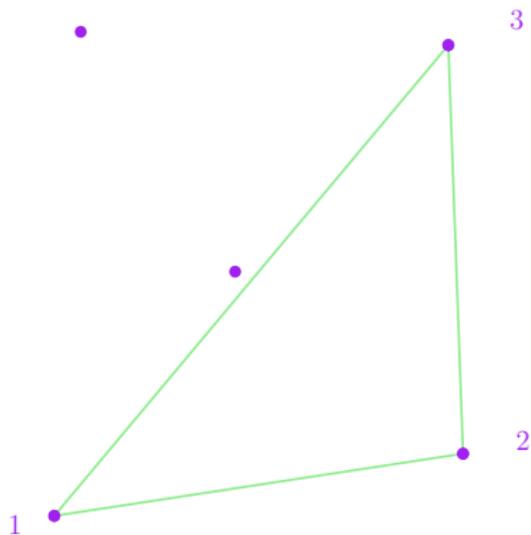
5 points $\rightarrow 1+1+2 = 4$ triangles construits

Exemple



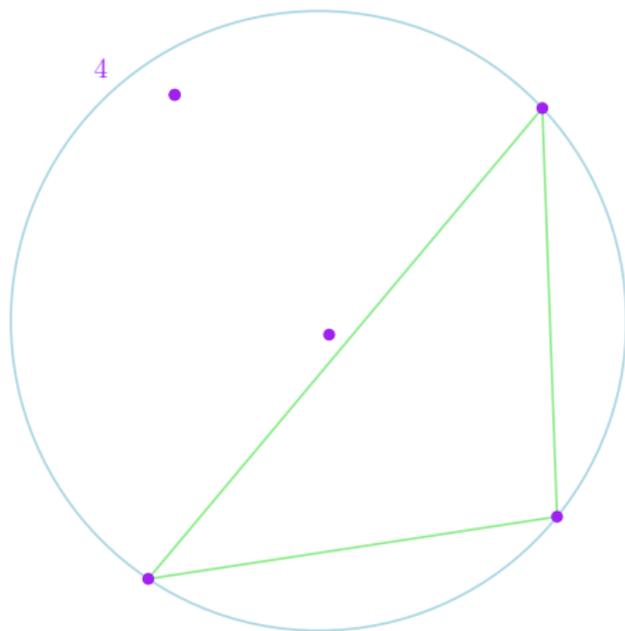
on insère les points dans un autre ordre

Exemple



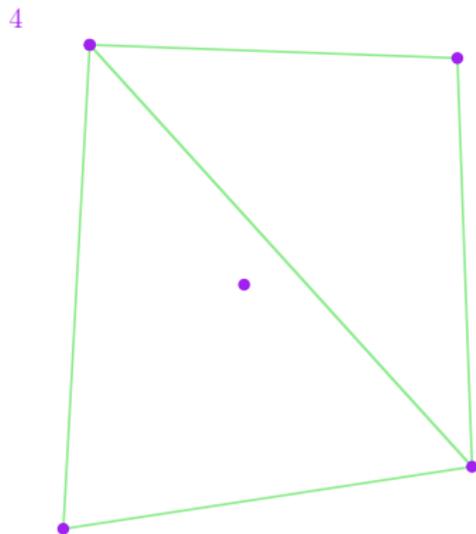
3 points \rightarrow 1 triangle construit

Exemple



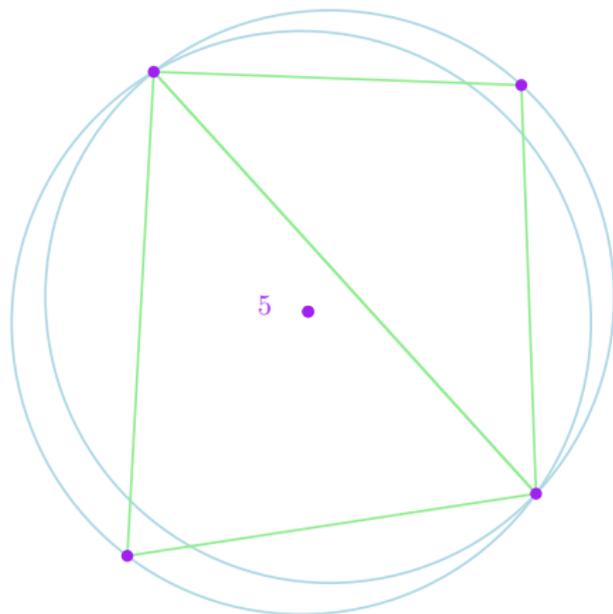
4 points \rightarrow 1 triangle détruit

Exemple



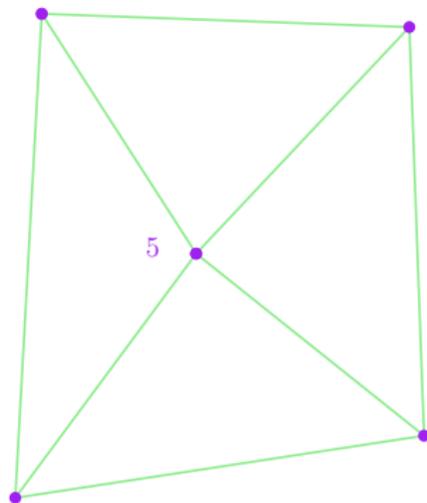
4 points \rightarrow 2 triangles construits

Exemple



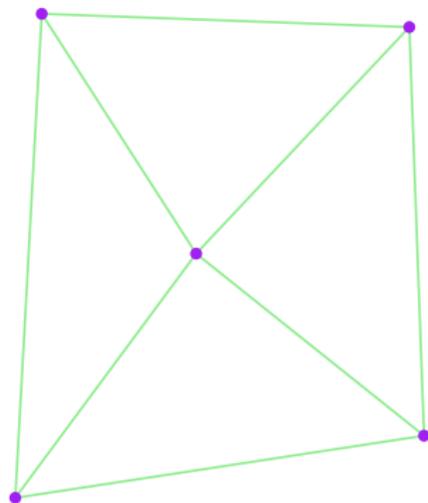
5 points \rightarrow 2 triangle détruits

Exemple



5 points \rightarrow 4 triangles construits

Exemple



5 points $\rightarrow 1+2+4 = 7$ triangles construits

Exemple

opération = construction d'un triangle

5 points

$$4 \leq \text{nombre d'opérations} \leq 7$$

n points

$$\text{environ } n \leq \text{nombre d'opérations} \leq \text{environ } n^2$$

Exemple

opération = construction d'un triangle

5 points

$$4 \leq \text{nombre d'opérations} \leq 7$$

n points

$$\text{environ } n \leq \text{nombre d'opérations} \leq \text{environ } n^2$$

Programmes efficaces

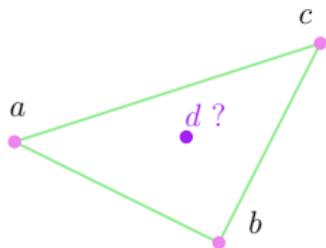


besoin : Algorithmes ayant une bonne complexité

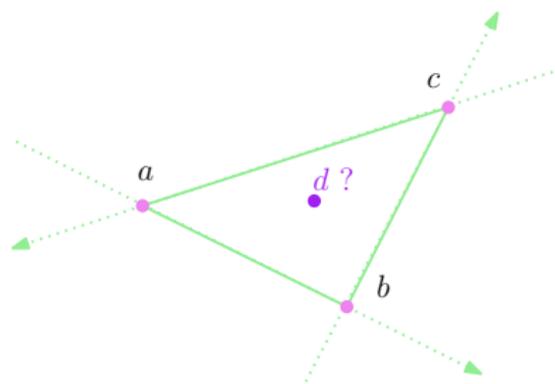
Sixième partie VI

Calculs

Un point est-il dans un triangle ?



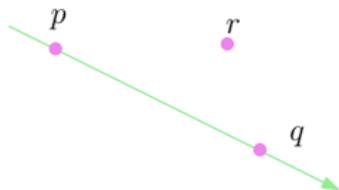
Un point est-il dans un triangle ?



- d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
- d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
- d à gauche de $\overrightarrow{(ca)}$

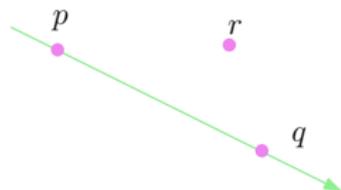
Un point est-il dans un triangle ?

r à gauche de $\overrightarrow{(pq)}$?



Un point est-il dans un triangle ?

r à gauche de $\overrightarrow{(pq)}$?



$$(y_p - y_q) \times x_r + (x_q - x_p) \times y_r + (x_q \times y_p - x_p \times y_q) > 0 ?$$

quelques soustractions et multiplications, facile !

L'ordinateur ne calcule pas juste !

modèle à 2 chiffres décimaux

$$35 + 3.7 = 38.7$$

$$(35 + 3.3) + 0.4 \approx 38$$

$$35 + (3.3 + 0.4) \approx 39$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

modèle à 2 chiffres décimaux

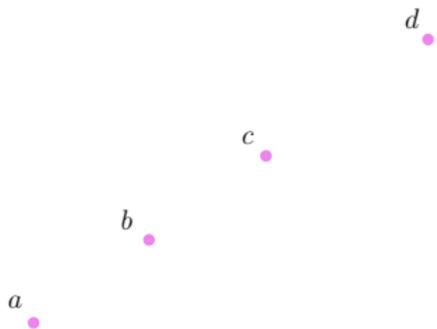
$$35 + 3.7 = 38.7$$

$$(35 + 3.3) + 0.4 \approx 38$$

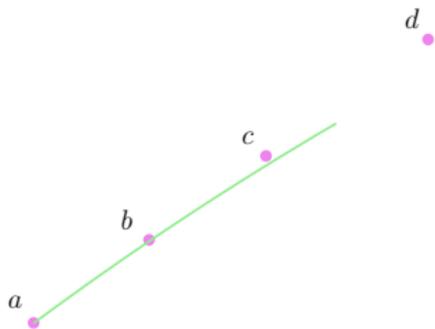
$$35 + (3.3 + 0.4) \approx 39$$

Avec 15 chiffres décimaux, la précision augmente
mais **les résultats sont tout de même faux !**

L'ordinateur ne calcule pas juste !

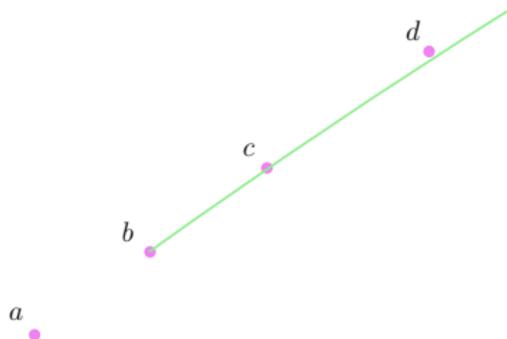


L'ordinateur ne calcule pas juste !



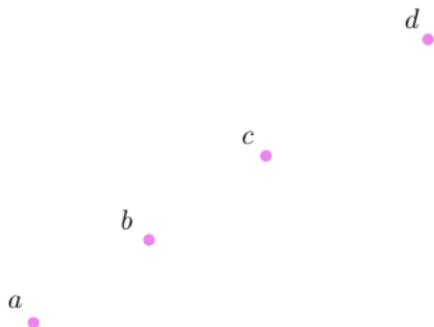
c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

L'ordinateur ne calcule pas juste !



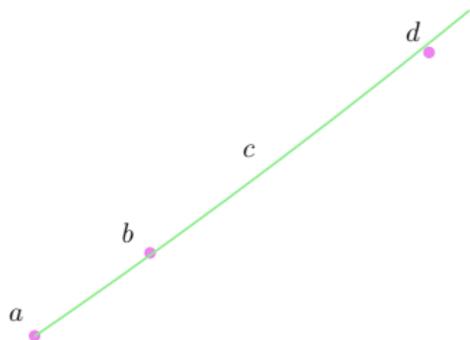
c à gauche de $\overbrace{(ab)}$
 d à gauche de $\overbrace{(bc)}$

L'ordinateur ne calcule pas juste !



c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
 d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

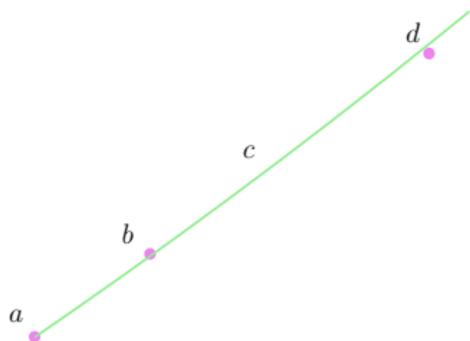
L'ordinateur ne calcule pas juste !



c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
 d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

calculs arrondis \longrightarrow l'ordinateur trouve le contraire

L'ordinateur ne calcule pas juste !

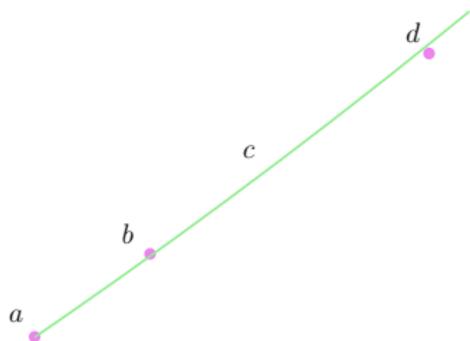


c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
 d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

calculs arrondis \longrightarrow l'ordinateur trouve le contraire

échec !

L'ordinateur ne calcule pas juste !



c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
 d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

calculs arrondis \longrightarrow l'ordinateur trouve le contraire

solution : contrôler les erreurs d'arrondi

Septième partie VII

Dans l'espace

Dans l'espace

Tétraédrisation de
Delaunay

Même algorithme que dans le plan

triangles

→ tétraèdres

disques vides

→ boules vides

Dans l'espace

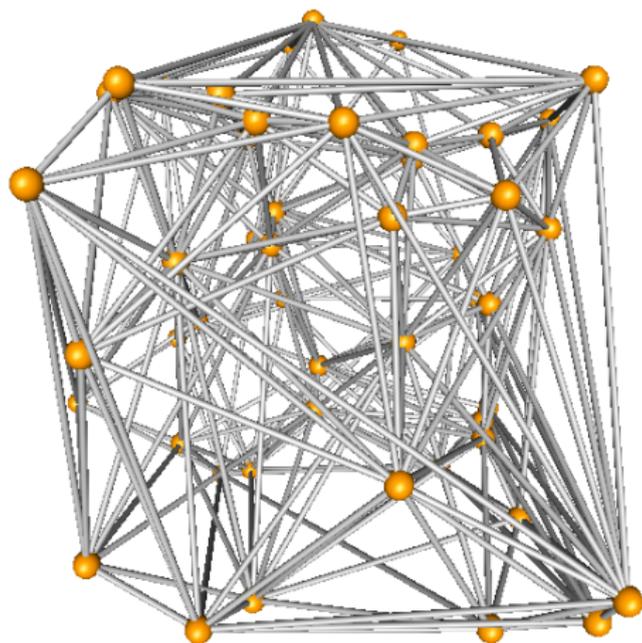
Tétraédrisation de
Delaunay

triangles

→ tétraèdres

disques vides

→ boules vides



Dans l'espace

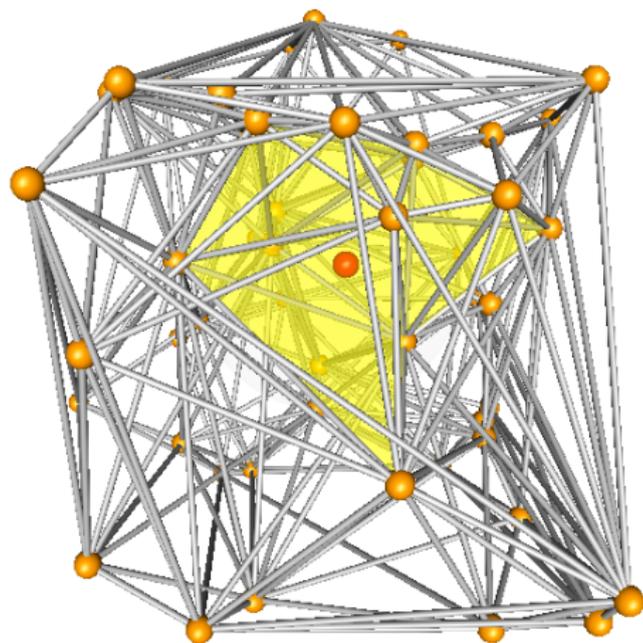
Tétraédrisation de
Delaunay

triangles

→ tétraèdres

disques vides

→ boules vides



trouver les tétraèdres en conflit

Dans l'espace

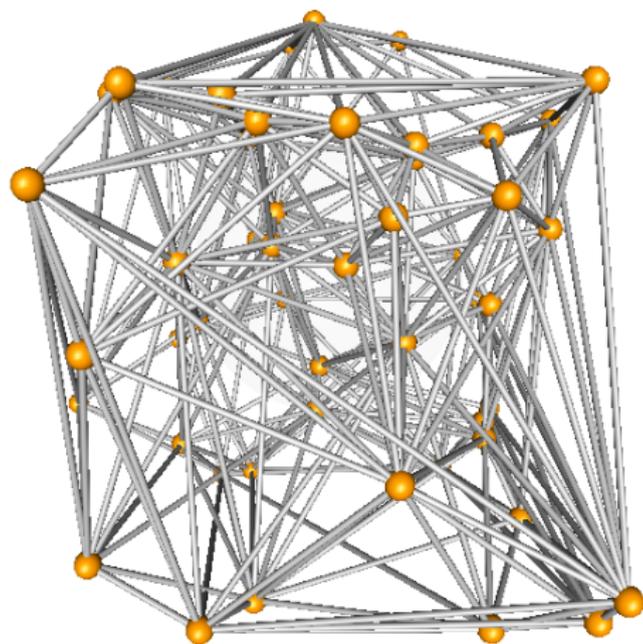
Tétraédrisation de
Delaunay

triangles

→ tétraèdres

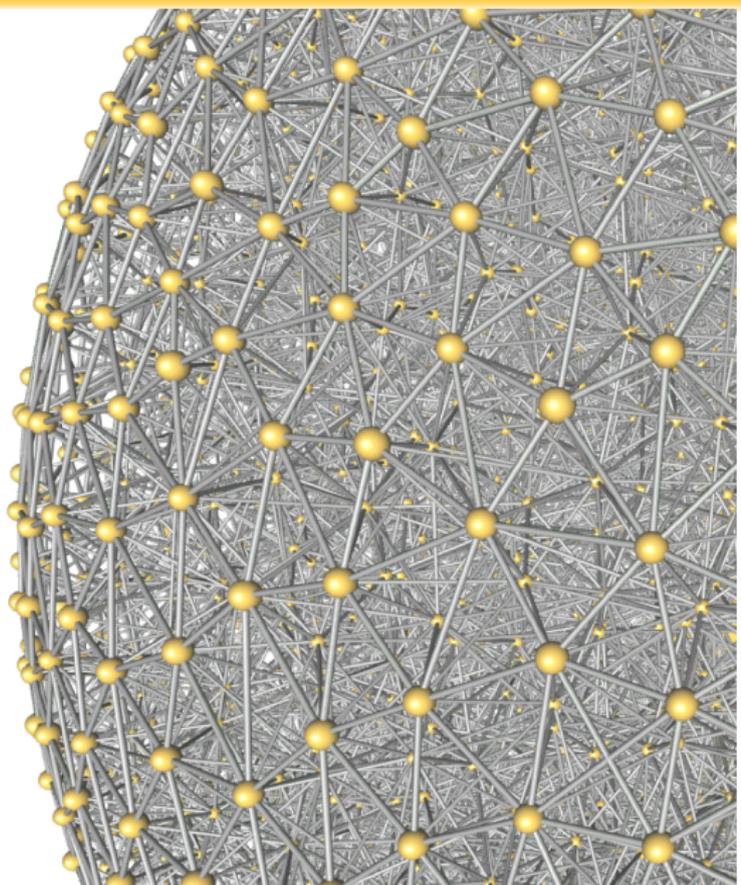
disques vides

→ boules vides



étoiler la région autour du point

Dans l'espace



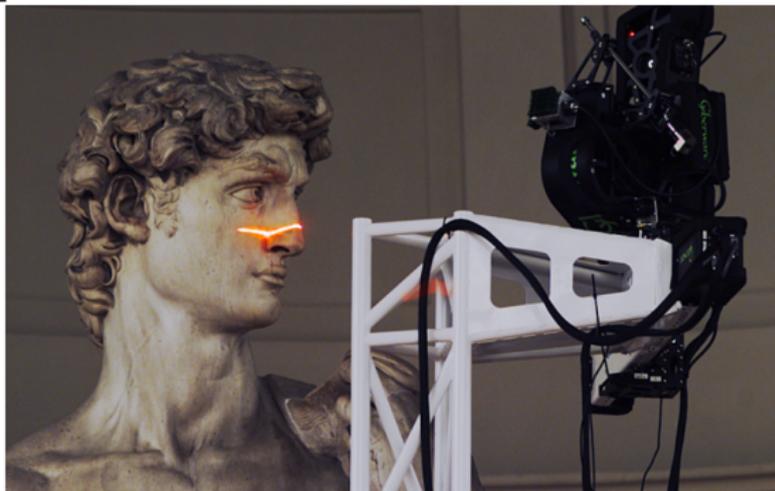
Huitième partie VIII

Applications

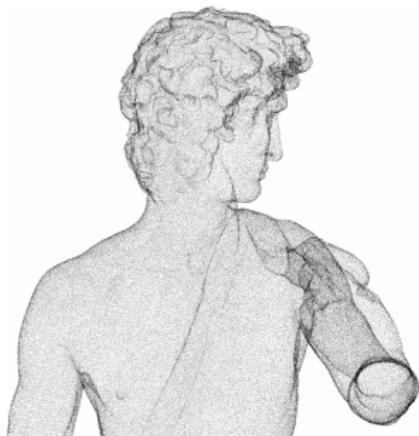
- Visualiser
- Transmettre
- Modéliser
- ...

des formes

Mesurer

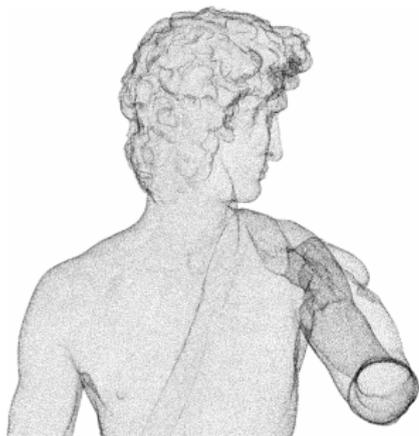


Reconstruire

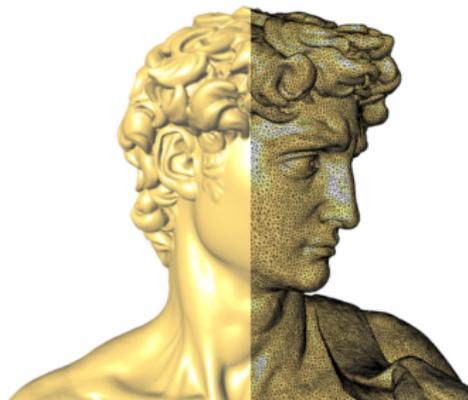


Ensemble de points

Reconstruire



Ensemble de points



“Triangulation”

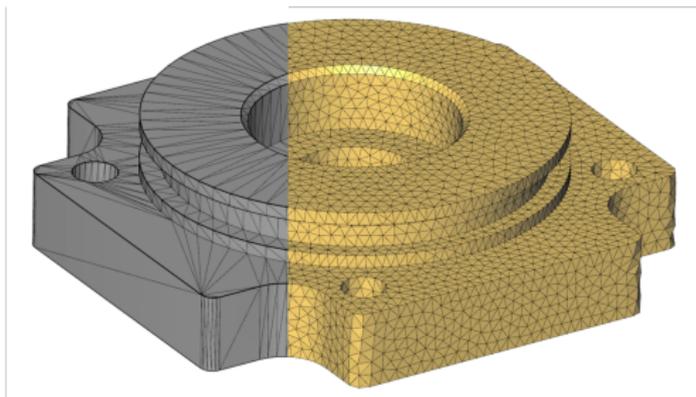
Motivations

CAO (conception assistée par ordinateur)

Capteurs

- laser
- mécanique
- ...

Ingénierie inverse
Prototypage
Contrôle qualité



Motivations

Médical

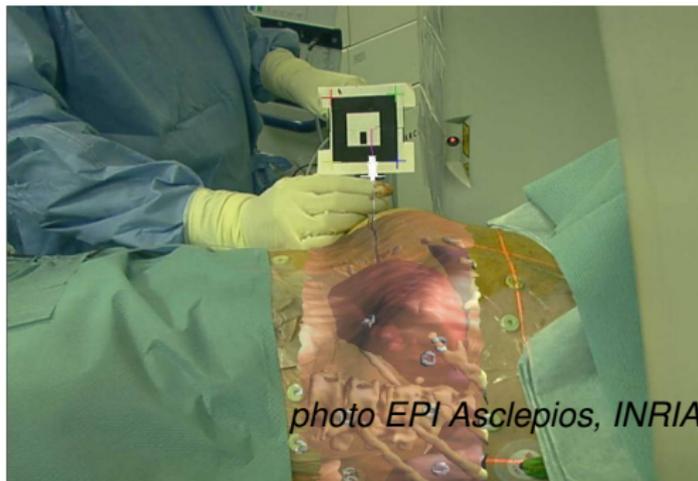
Capteurs

- scanner
- échographie
- ...

Diagnostic

Simulation d'endoscopie

Planification de chirurgie

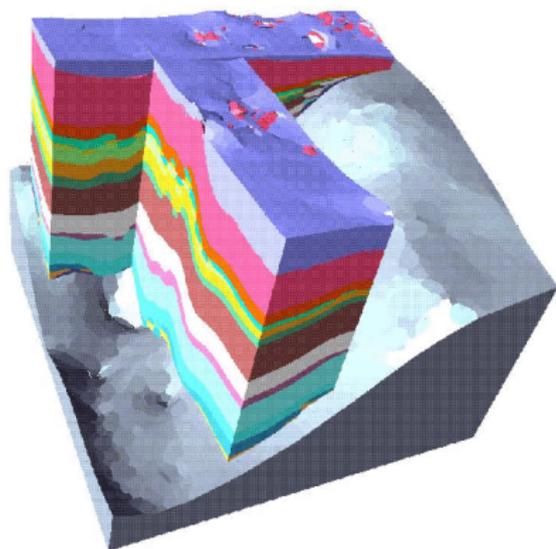


Motivations

Géographie, géologie

Capteurs

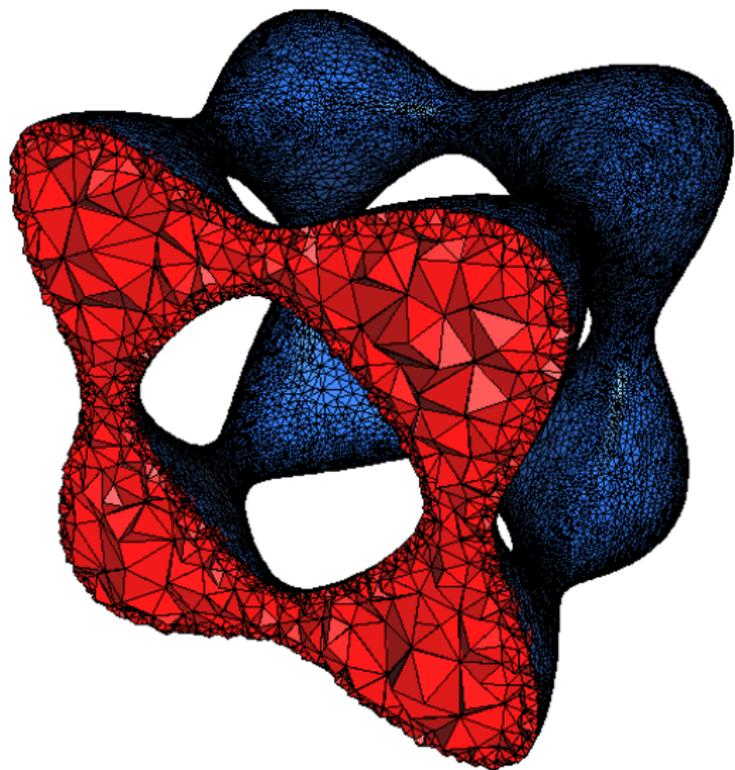
- Carotage
- Images sismiques
- ...

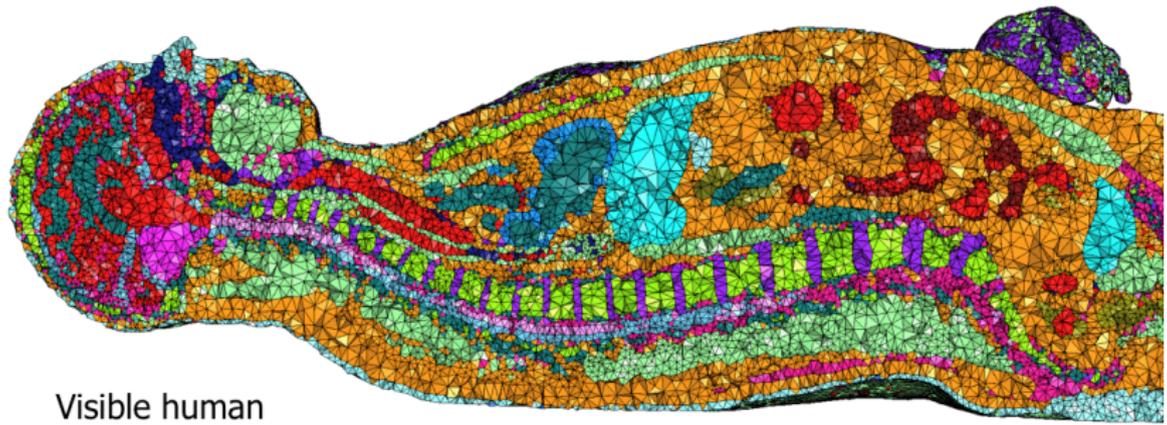


Cartographie

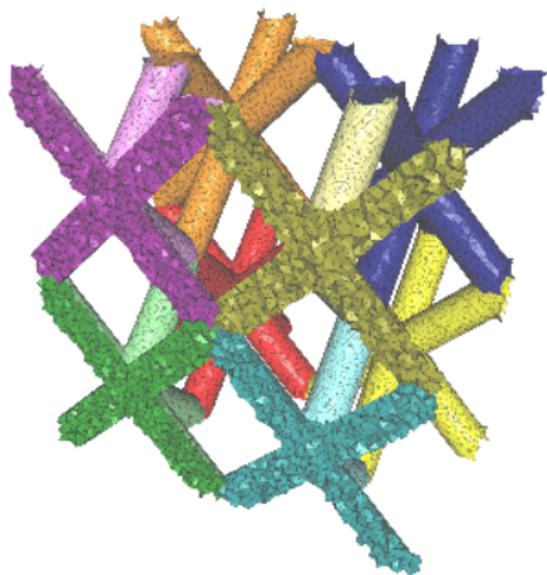
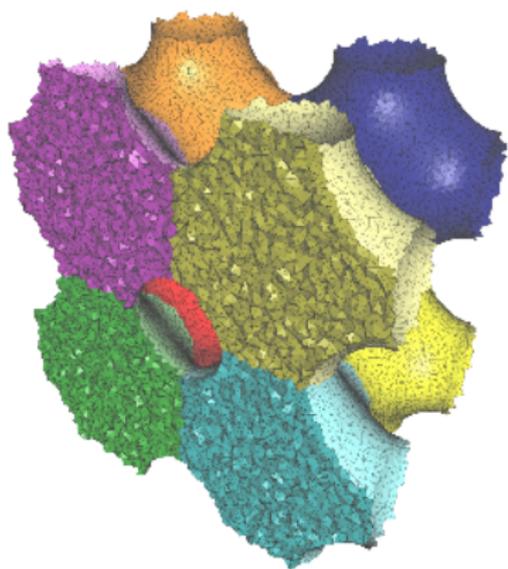
Modélisation radio

Modèle du sous-sol





Visible human



données Maarten Moesen



Neuvième partie IX

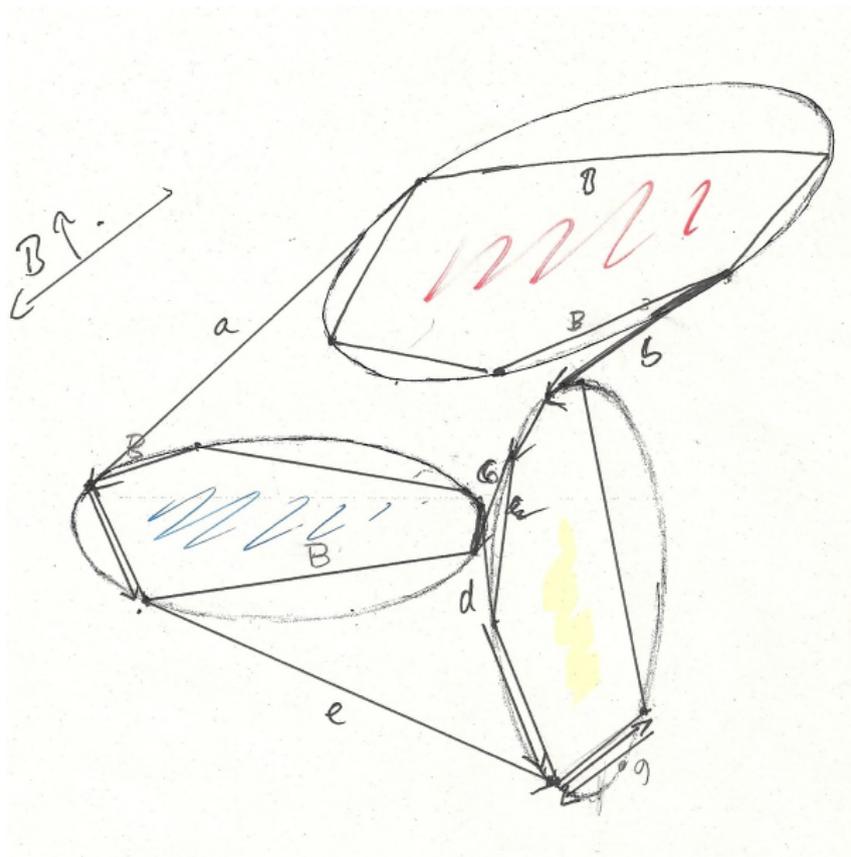
Qu'est-ce qu'un chercheur ?

C'est quelqu'un qui. . .

- recherche des financements
- fait de l'administration
- . . .

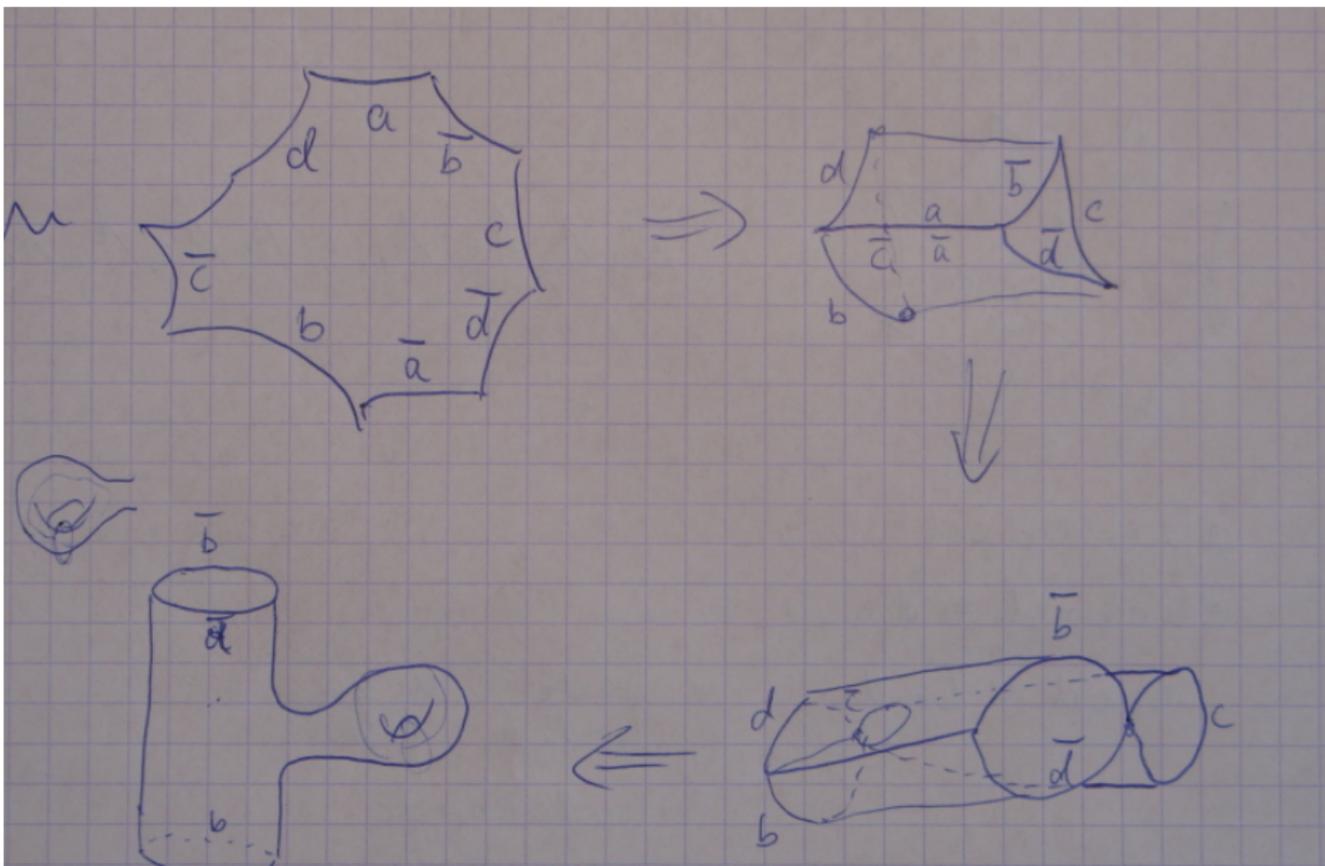
C'est quelqu'un qui...

cherche...



C'est quelqu'un qui...

cherche...



C'est quelqu'un qui...

cherche...

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k & x_l & x_m \\ y_i & y_j & y_k & y_l & y_m \\ z_i & z_j & z_k & z_l & z_m \\ t_i + \varepsilon^{n-i} & t_j + \varepsilon^{n-j} & t_k + \varepsilon^{n-k} & t_l + \varepsilon^{n-l} & t_m + \varepsilon^{n-m} \end{vmatrix}$$

=

$$\begin{aligned} & D(s_i, s_j, s_k, s_l, s_m) \\ & + O(p_i, p_j, p_k, p_l) \varepsilon^{n-m} - O(p_i, p_j, p_k, p_m) \varepsilon^{n-l} \\ & + O(p_i, p_j, p_l, p_m) \varepsilon^{n-k} - O(p_i, p_k, p_l, p_m) \varepsilon^{n-j} \\ & + O(p_j, p_k, p_l, p_m) \varepsilon^{n-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta(n) &= \sum_{i=1}^n \nu(i) \\ &= O\left(\sum_{i=1}^n i^{\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1}\right) \\ &= O\left(n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}\right)\end{aligned}$$

Triangulation de Delaunay

- 1992 ● plan : 15000 points en 30 secondes
(avec échecs potentiels)
- 2010 ● plan : 10 millions de points en 12 secondes
● espace : 1 million de points en 10 secondes
(avec un résultat garanti)

(les ordinateurs ont évolué aussi)

Computing 3D Periodic Triangulations[☆]

Manuel Caroli^a, Monique Teillaud^a

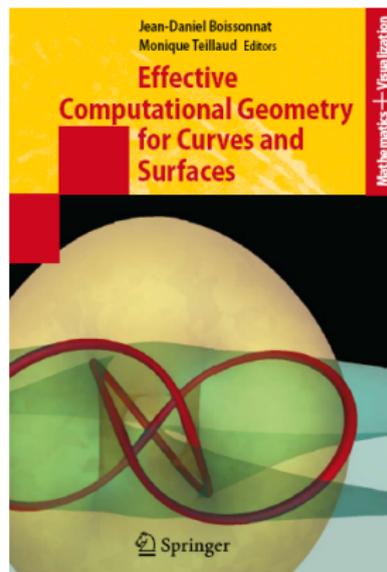
^a *INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée*
2004 Route des Lucioles, F-06902 Sophia Antipolis CEDEX, France

Abstract

This work is motivated by the need for software computing 3D periodic triangulations in numerous domains including astronomy, material engineering, biomedical computing, fluid dynamics etc. We give a definition for the Delaunay triangulation of the 3D flat torus defined by a set of points, and we propose an incremental algorithm that computes it without duplicating any point, whenever possible. During the computation of the triangulation, the algorithm detects when such a duplication can be avoided: It uses a simple geometric criterion to test whether a partition of the 3D flat torus actually forms a triangulation (which subsumes that it is a simplicial complex). This is usually the case in practical situations. Additionally, even in cases where point duplication

C'est quelqu'un qui. . .

publie



```
template < class Gt, class Tds >
typename Delaunay_triangulation_3<Gt,Tds>::Vertex_handle
Delaunay_triangulation_3<Gt,Tds>::
insert(const Point & p, Locate_type lt, Cell_handle c,
        int li, int lj)
{
    switch (dimension()) {
    case 3:
        {
            Conflict_tester_3 tester(p, this);
            Vertex_handle v =
                insert_in_conflict(p, lt, c, li, lj,
                                   tester, hidden_point_visitor);
            return v;
        } // dim 3
    }
    ...
}
```

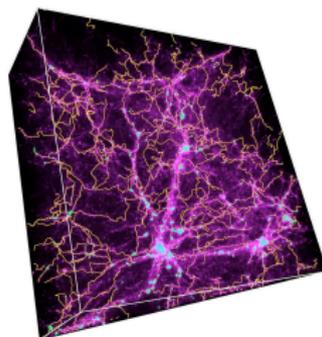
The persistent cosmic web and its filamentary structure

T. Sousbie,

Department of Physics, The University of Tokyo

Institut d'astrophysique de Paris

"we use the periodic exact 3D periodic boundary conditions Delaunay tessellation (Caroli & Teillaud 2010)"



Code de calcul de triangulations de Delaunay intégré à
MATLAB,
outil de calcul scientifique largement utilisé.

C'est quelqu'un qui. . .

travaille en équipe



photo site web INRIA

C'est quelqu'un qui. . .

encadre des étudiants



C'est quelqu'un qui. . .

donne des conférences



C'est quelqu'un qui. . .

participe à des "réunions"



... et qui va même parfois dans des collègues

Merci pour votre attention