Traitement numérique de la géométrie

Lorsque nos maths s'incarnent dans les ordinateurs

Monique Teillaud

http://www.inria.fr/sophia/members/Monique.Teillaud/

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

INRIA

centre de recherche SOPHIA ANTIPOLIS - MÉDITERRANÉE

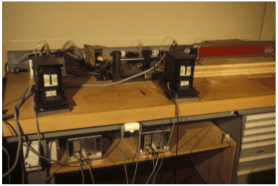
Lycée Jean Cocteau, Miramas

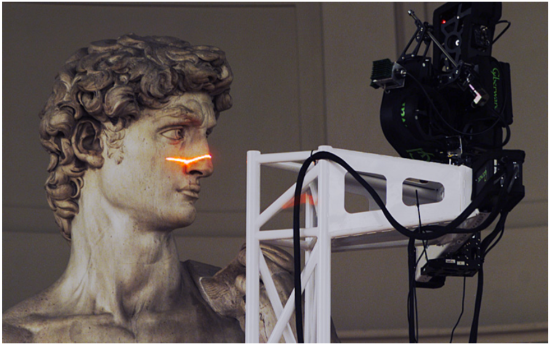
1er février 2011

- Visualiser
- Transmettre
- Modéliser
- …

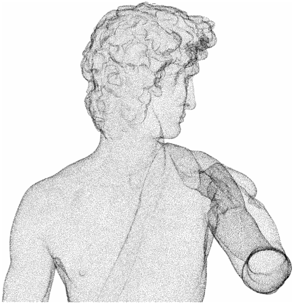
des formes

Mesurer



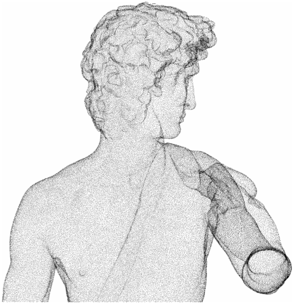


Reconstruire



Ensemble de points

Reconstruire



Ensemble de points

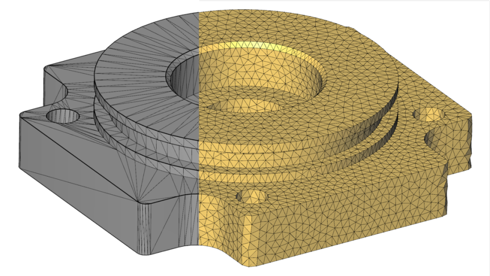
$\mapsto$

“Triangulation”

Motivations
CAO (conception assistée par ordinateur)

Capteurs

- laser
- mécanique
- ...



Ingénierie inverse
Prototypage
Contrôle qualité

Motivations
Médical

Capteurs

- scanner
- échographie
- ...

Diagnostic
Simulation d'endoscopie
Planification de chirurgie

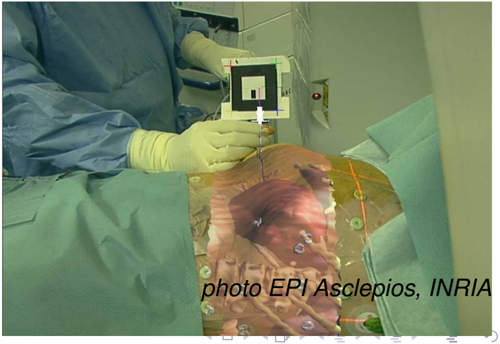


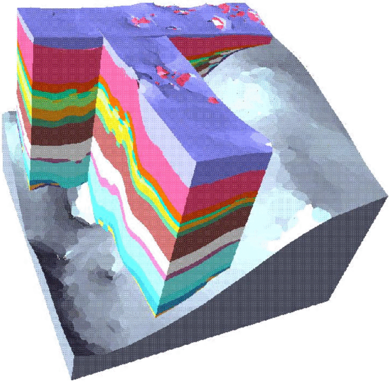
photo EPI Asclepios, INRIA

Motivations

Géographie, géologie

Capteurs

- Carotage
- Images sismiques
- ...



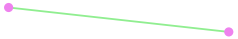
Cartographie
Modélisation radio
Modèle du sous-sol

Part I

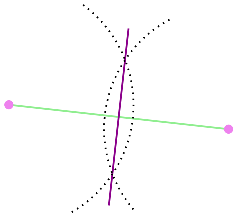
L'outil de base : le triangle

Surface triangulée

Cercle circonscrit

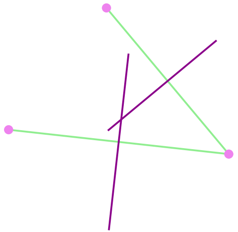


Cercle circonscrit

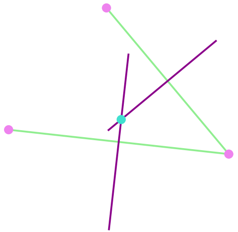


médiatrice =
{points équidistants}

Cercle circonscrit

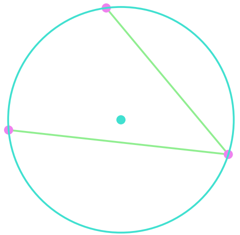


Cercle circonscrit



intersection =
point équidistant
aux 3 sommets

Cercle circonscrit



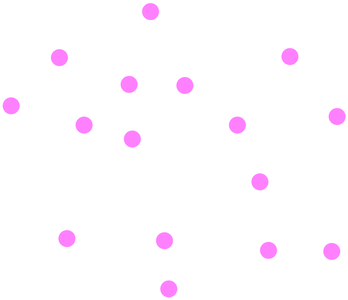
intersection =
point équidistant
aux 3 sommets

Part II

Triangulation de Delaunay

Définitions

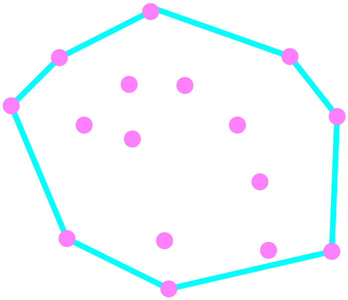
Dans le plan $\mathbb{R}^2$



Ensemble de points

Définitions

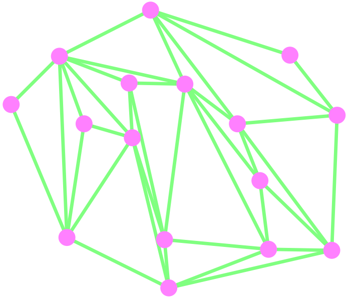
Dans le plan $\mathbb{R}^2$



Enveloppe convexe

Définitions

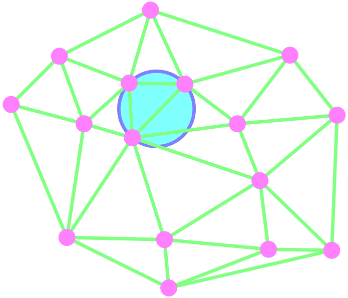
Dans le plan $\mathbb{R}^2$



Triangulation

Définitions

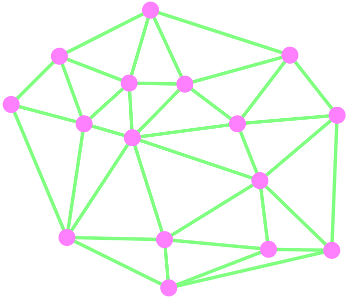
Dans le plan $\mathbb{R}^2$



Triangulation de Delaunay

Définitions

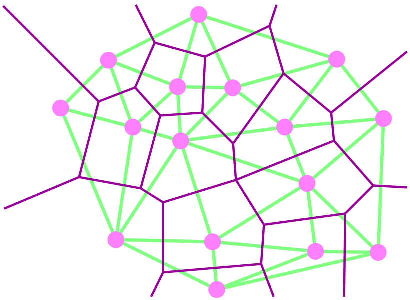
Dans le plan $\mathbb{R}^2$



Triangulation de Delaunay

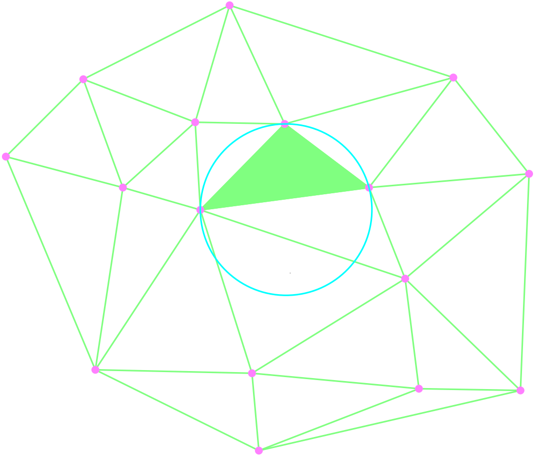
Définitions

Dans le plan $\mathbb{R}^2$

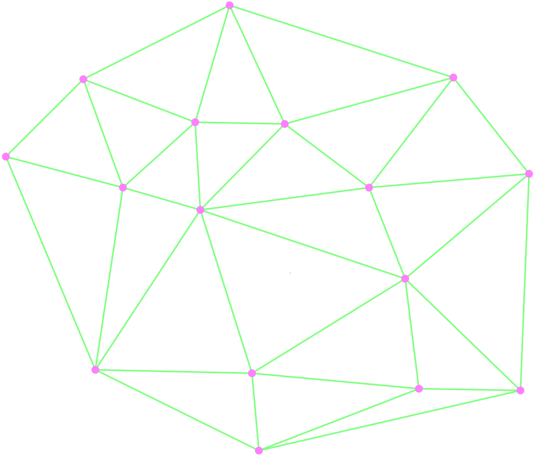


dual : diagramme de Voronoï

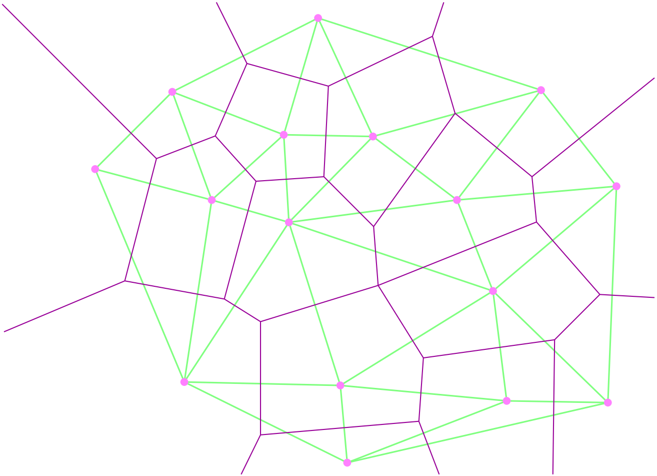
Points



Triangulation de Delaunay : disques vides



Triangulation de Delaunay



dual = Diagramme de Voronoï

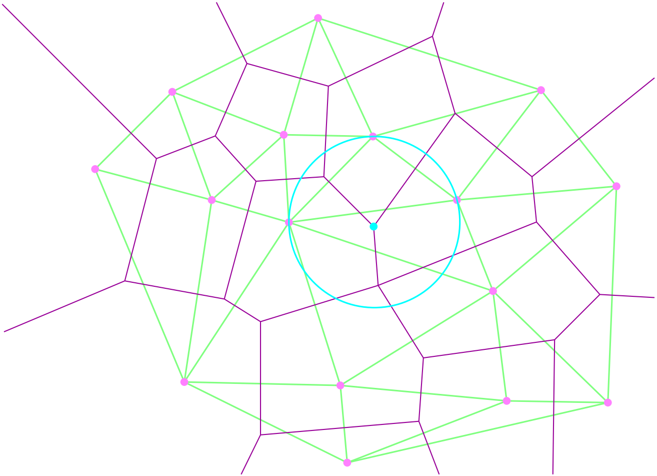


Diagramme de Voronoï : sommets = centres des disques vides

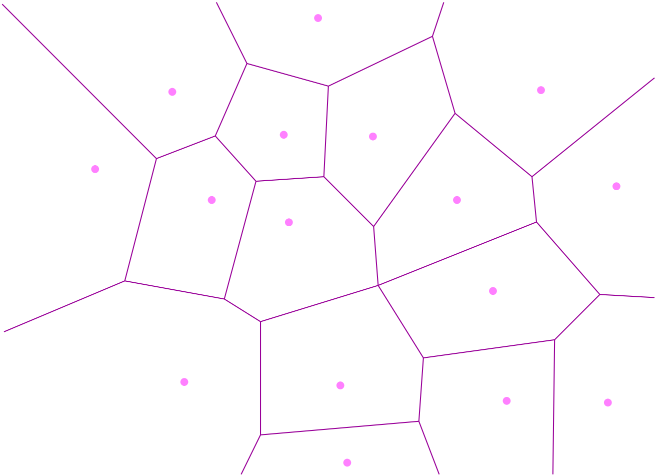


Diagramme de Voronoï

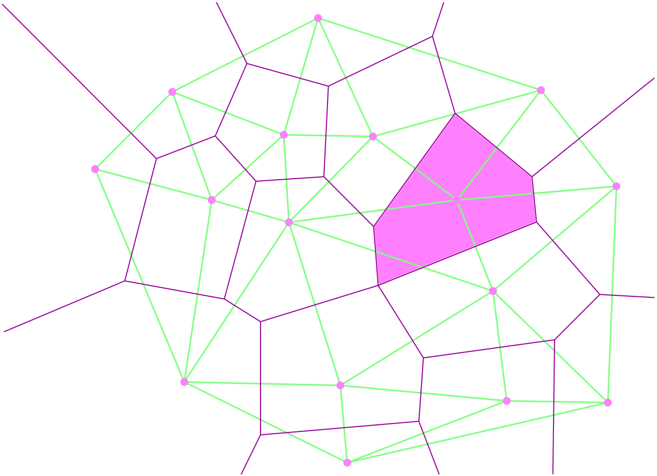


Diagramme de Voronoï : cellules convexes

Part III

Dans la nature

photo Chris Wu

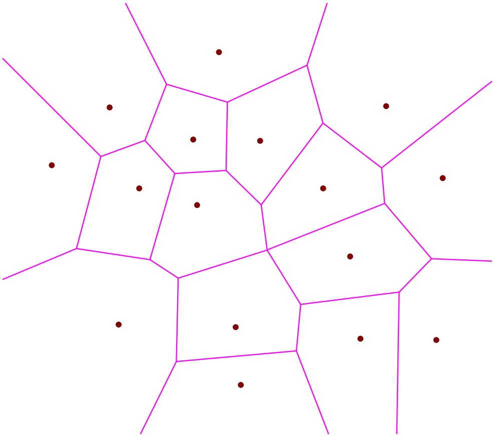
photo Andreas Fabri


photo Mathematical Association of America

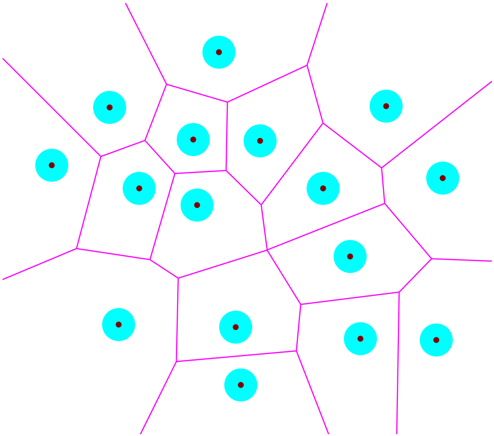
photo Argonne National Lab, MCS division, USA


photo IMPA, Brésil

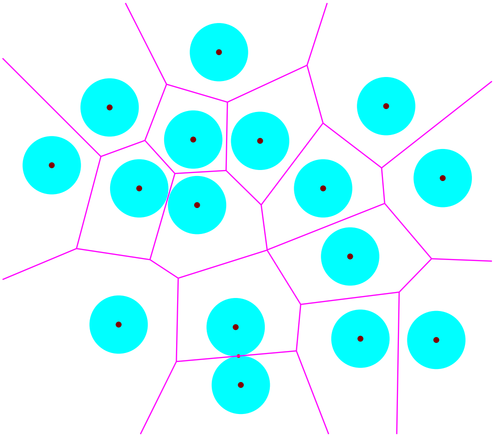
Modèle de croissance



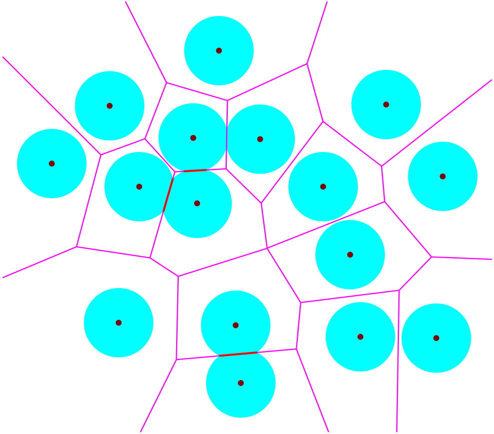
Modèle de croissance



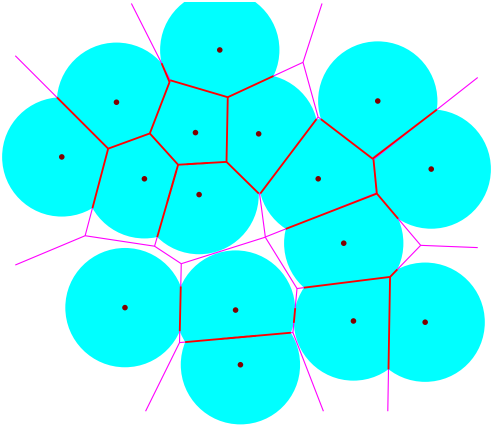
Modèle de croissance



Modèle de croissance



Modèle de croissance



Part IV

Algorithmes

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =

suite finie d'opérations
permettant de construire la réponse à un problème

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =

suite finie d'opérations
permettant de construire la réponse à un problème

nom latinisé de
Al-Khawarizmi, mathématicien Perse, 8$^{\text{ème}}$ siècle

Exemple: algorithme d'Euclide,
calcul du pgcd (plus grand diviseur commun)

Qu'est-ce que c'est ?

Algorithme =

suite finie d'opérations

permettant de construire la réponse à un problème

Algorithme incrémentiel

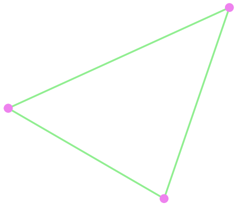
les données sont insérées une par une

Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :

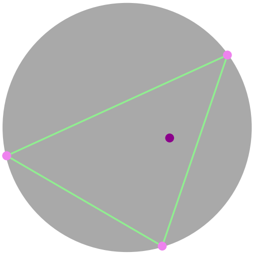
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



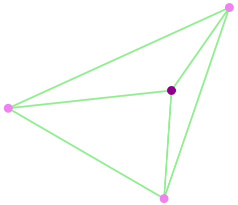
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



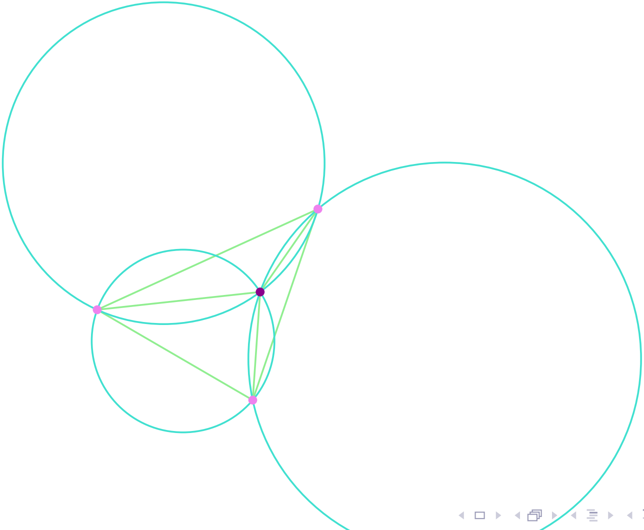
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



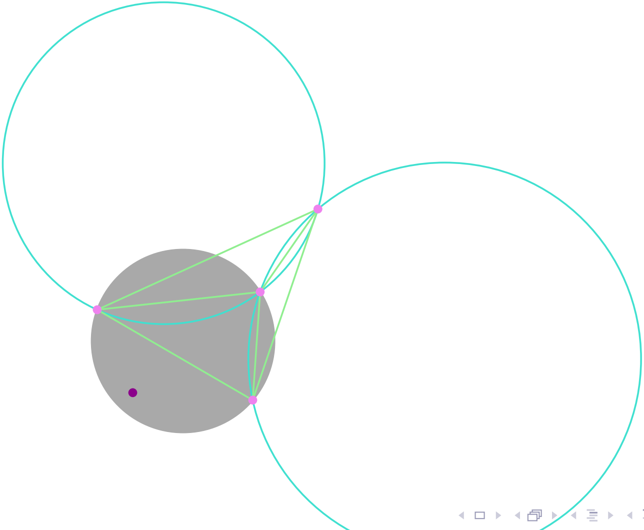
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



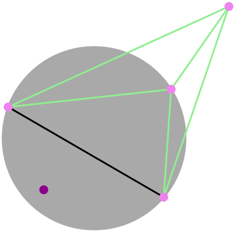
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



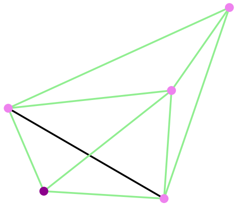
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



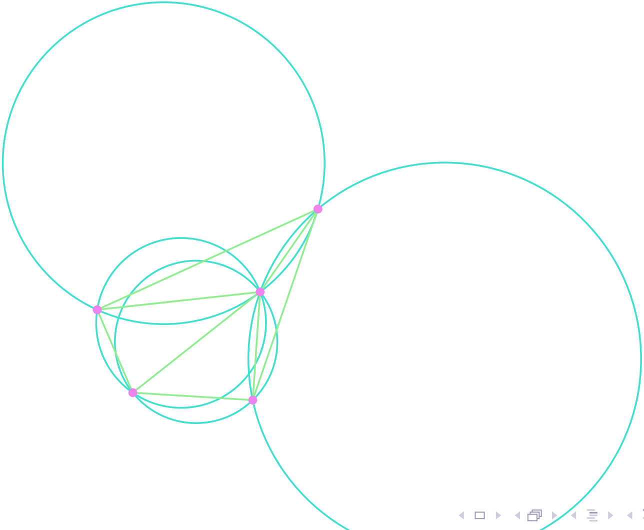
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



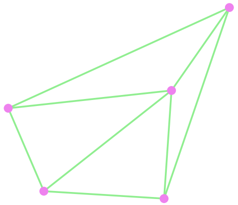
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



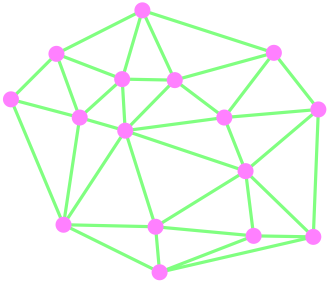
Calcul de la triangulation de Delaunay

On commence :



Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :

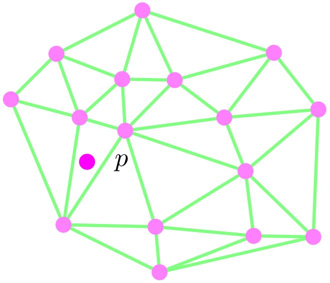


Algorithme :

Pour chaque point *p*

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



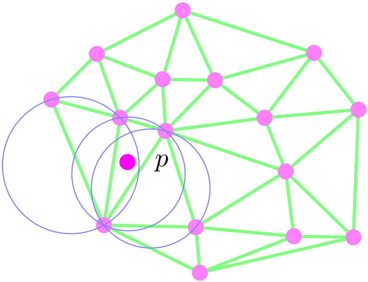
Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles en conflit avec p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



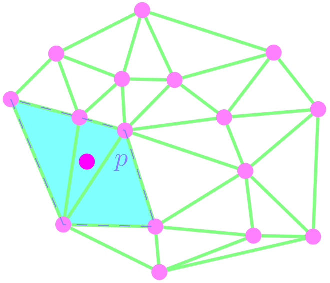
Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles en conflit avec p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



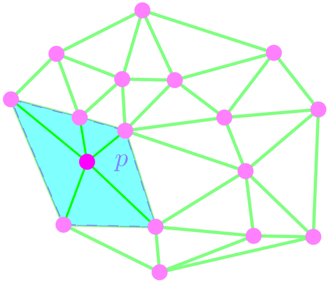
Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles en conflit avec p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et on continue :



Algorithme :

Pour chaque point p

- trouver les triangles en conflit avec p
- étoiler la région autour de p

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des dizaines de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des centaines de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des milliers ! de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des millions !! de points ?

Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des millions !! de points ?

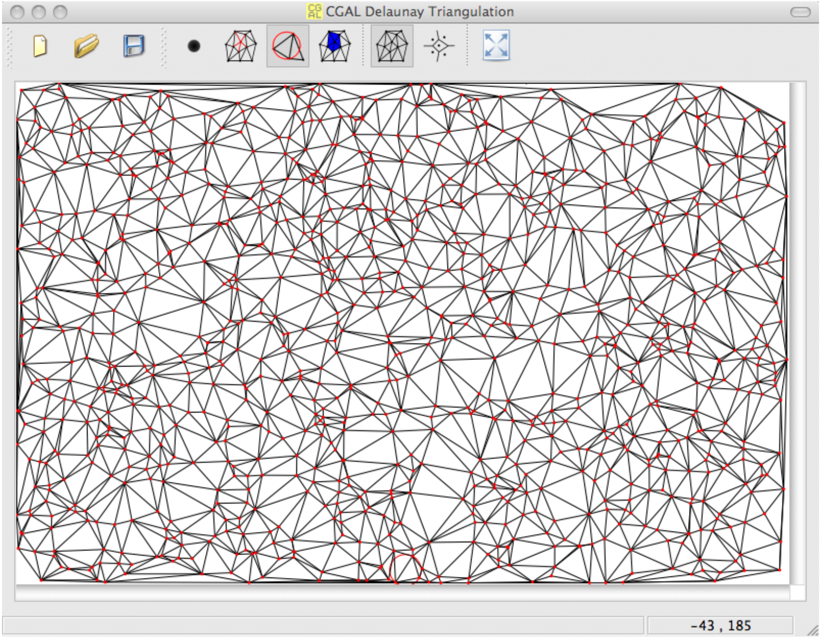
. . . on écrit un programme

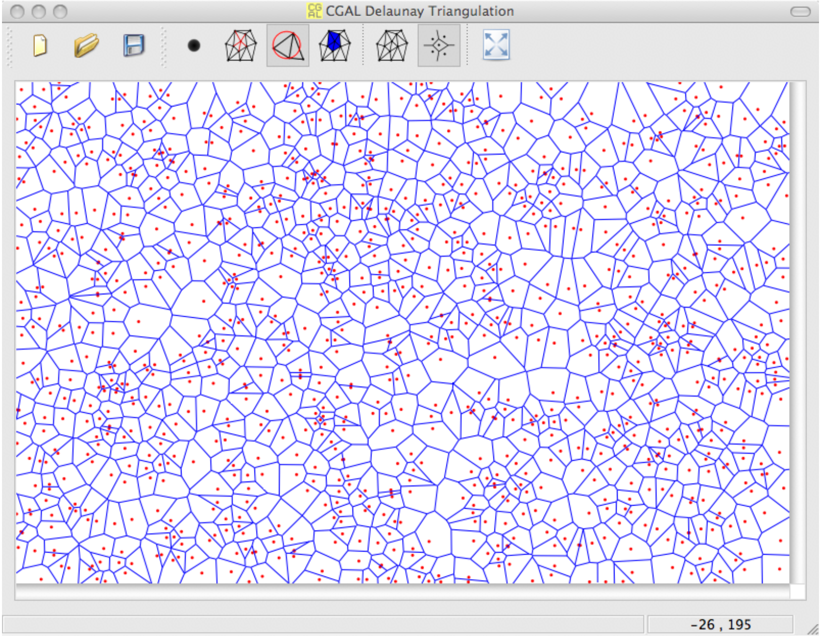
Calcul de la triangulation de Delaunay

Et avec des millions !! de points ?

. . . on écrit un programme

l'ordinateur calcule !


CGAL Delaunay Triangulation
-43 , 185



CGAL Delaunay Triangulation
-26 , 195

Part V

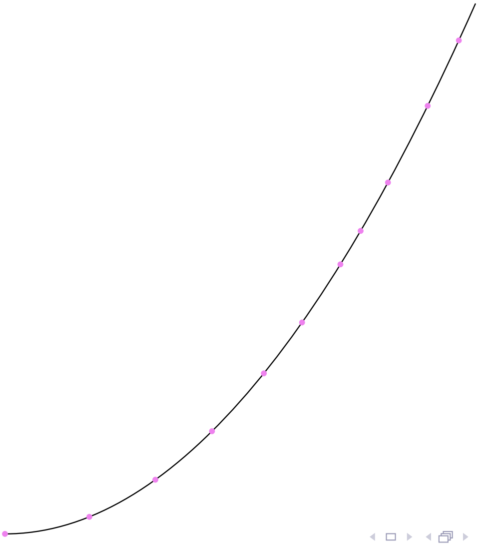
Complexité

Qu’est-ce que c’est ?

Nombre d’opérations élémentaires effectuées par l’algorithme

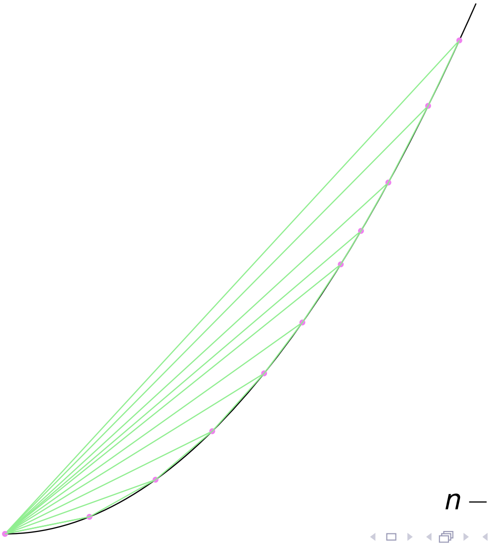
$\longrightarrow$ pour évaluer le temps de calcul

Exemple



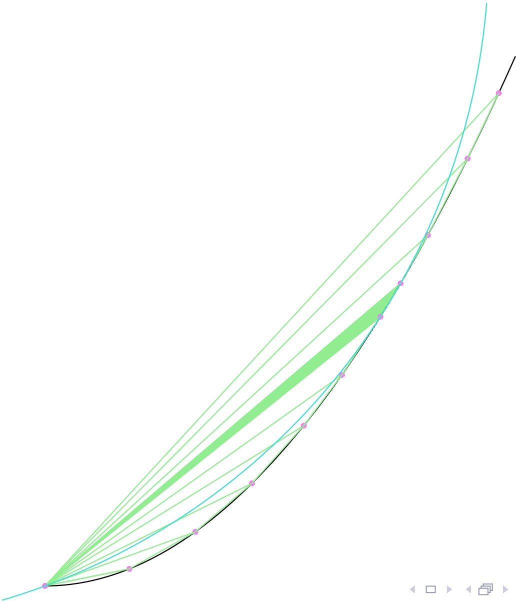
n points

Exemple

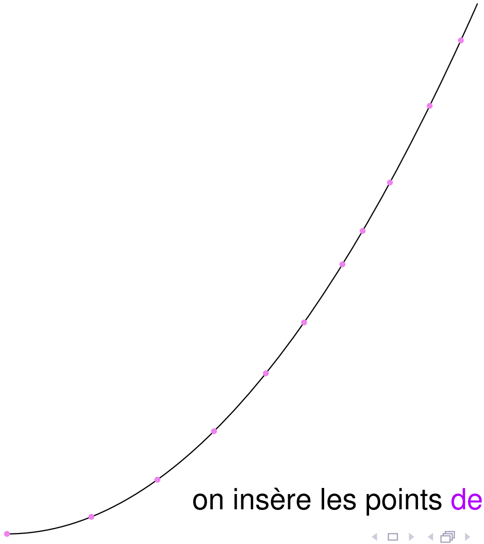


$n - 2$ triangles

Exemple

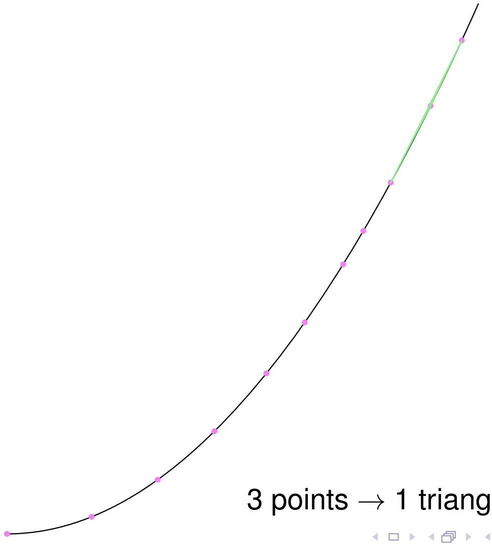


Exemple



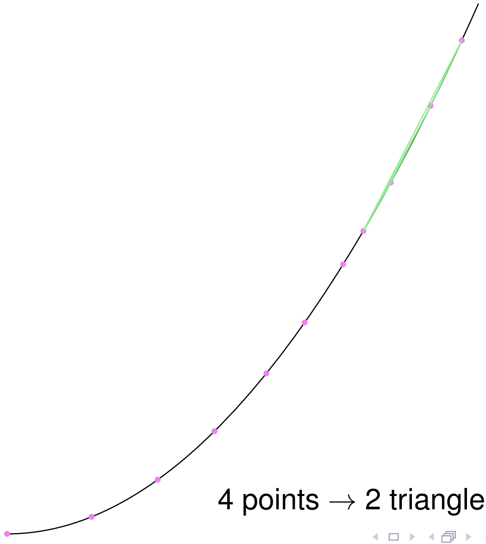
on insère les points depuis le haut

Exemple



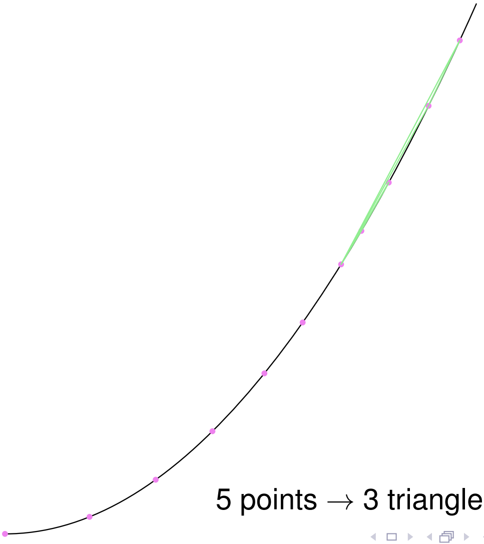
3 points → 1 triangle construit

Exemple



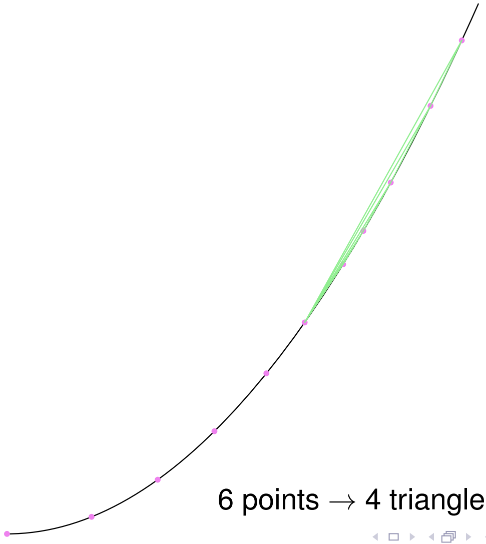
4 points → 2 triangles construits

Exemple



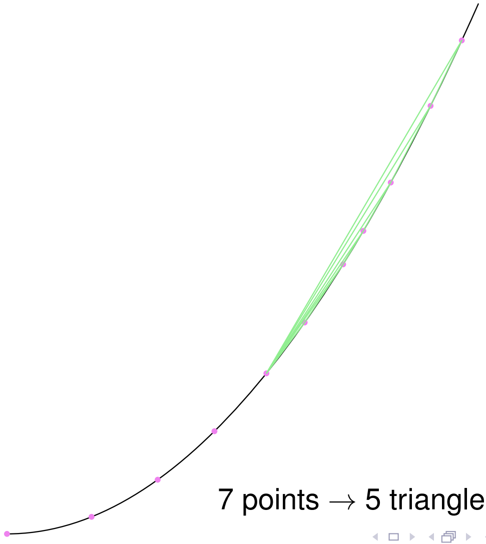
5 points $\rightarrow$ 3 triangles construits

Exemple



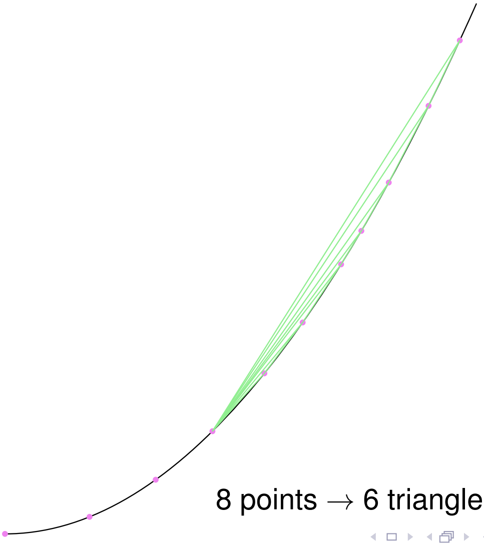
6 points $\rightarrow$ 4 triangles construits

Exemple



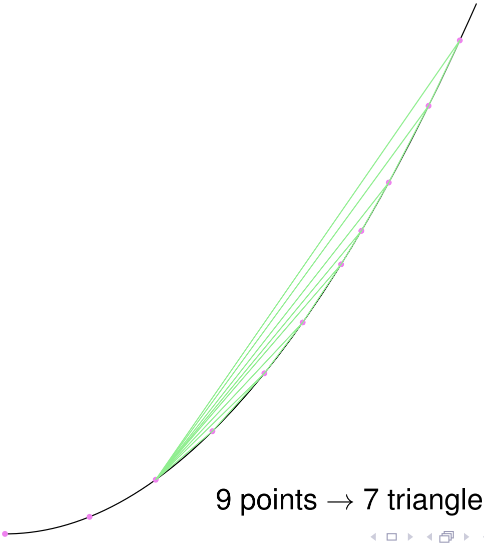
7 points $\rightarrow$ 5 triangles construits

Exemple



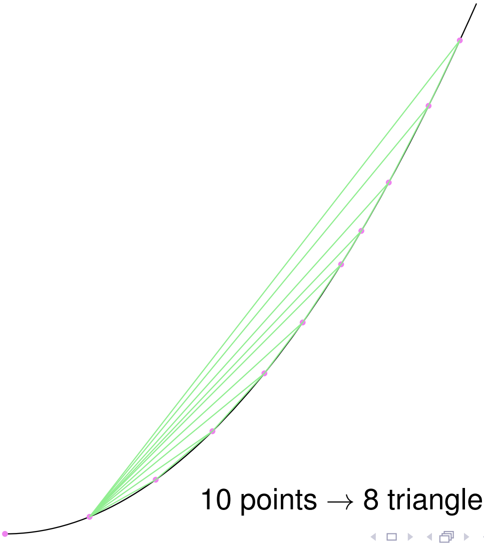
8 points $\rightarrow$ 6 triangles construits

Exemple



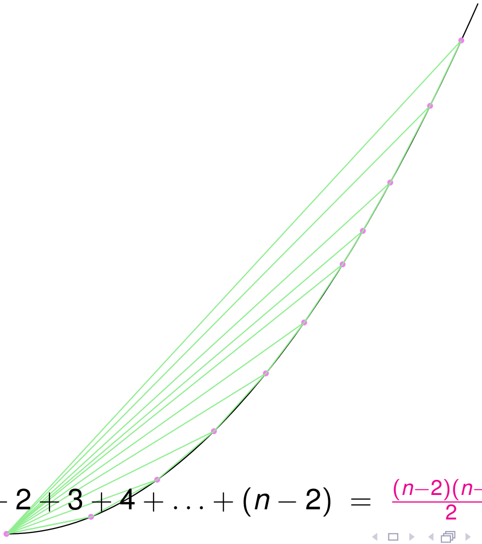
9 points $\rightarrow$ 7 triangles construits

Exemple



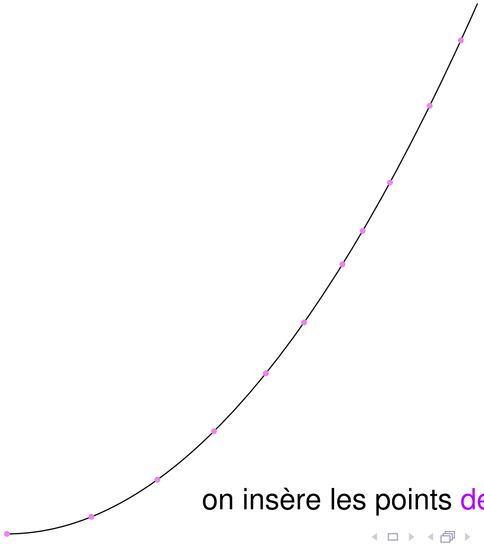
10 points → 8 triangles construits

Exemple



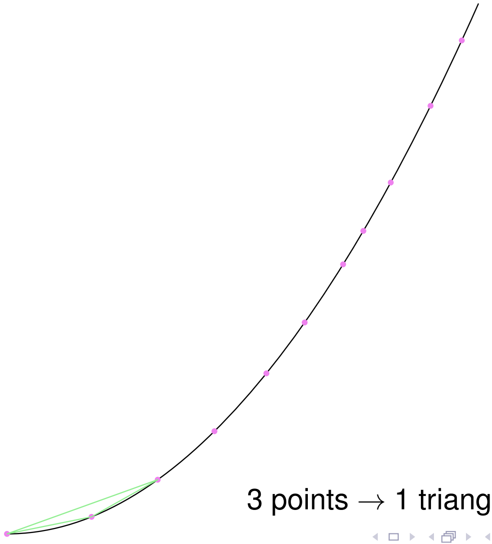
n points $\rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) \ = \ \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ triangles construits

Exemple



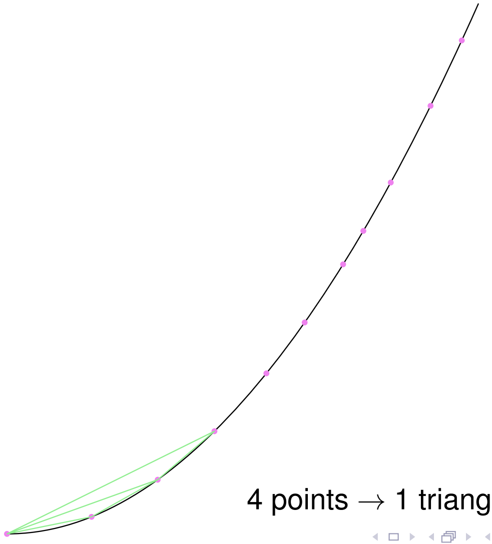
on insère les points depuis le bas

Exemple



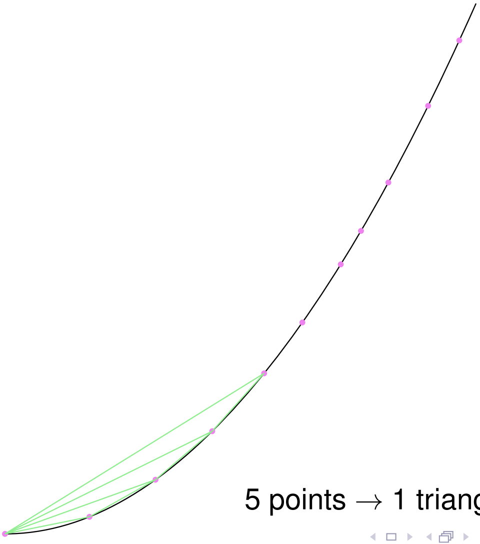
3 points $\rightarrow$ 1 triangle construit

Exemple



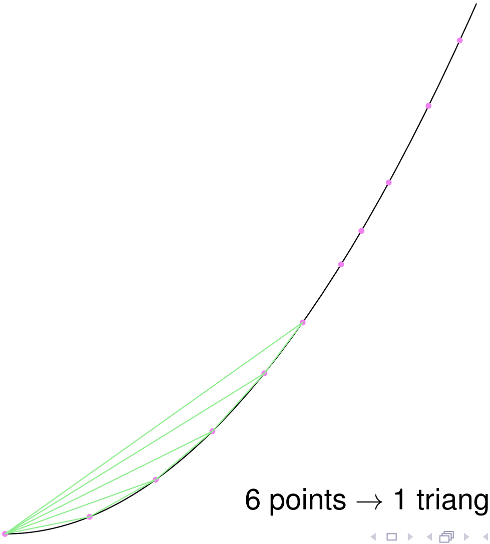
4 points $\rightarrow$ 1 triangle construit

Exemple



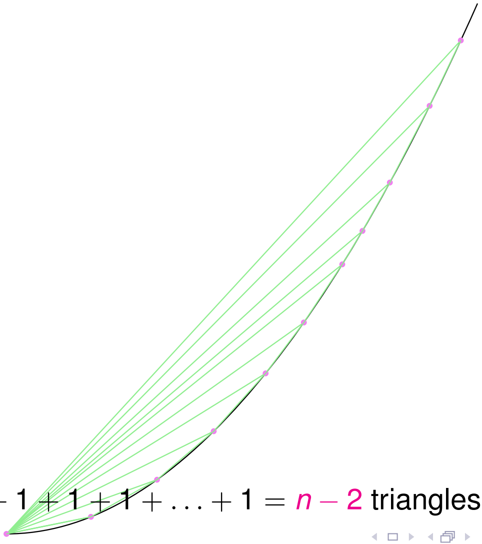
5 points → 1 triangle construit

Exemple



6 points → 1 triangle construit

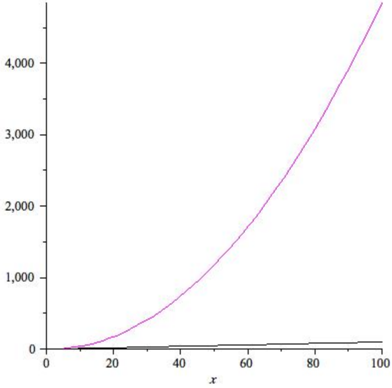
Exemple



n points $\rightarrow 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n - 2$ triangles construits

Exemple

$$n-2 \leq \text{ nombre d'opérations } \leq \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$



Exemple

$$n-2 \leq \text{ nombre d'opérations } \leq \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Programmes efficaces

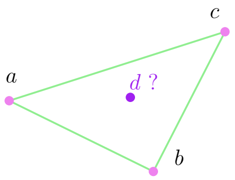
$$\downarrow$$

besoin : Algorithmes ayant une bonne complexité

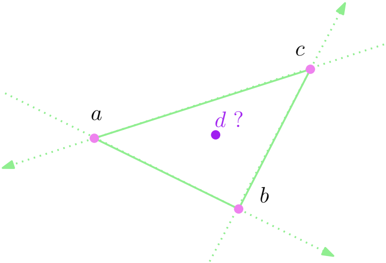
Part VI

Calculs

Un point est-il dans un triangle ?

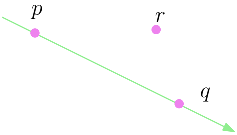


Un point est-il dans un triangle ?



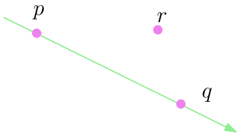
- d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
- d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
- d à gauche de $\overrightarrow{(ca)}$

Un point est-il dans un triangle ?



r à gauche de $\overrightarrow{(pq)}$?

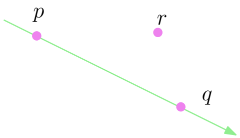
Un point est-il dans un triangle ?



équation de la droite (pq) :

$$(y_p - y_q) \times x + (x_q - x_p) \times y + (x_q \times y_p - x_p \times y_q) = 0$$

Un point est-il dans un triangle ?



r à gauche de $\overrightarrow{(pq)}$?

$$(y_p - y_q) \times x \; + \; (x_q - x_p) \times y \; + \; (x_q \times y_p - x_p \times y_q) \; = \; 0$$

$$(y_p - y_q) \times x_r \; + \; (x_q - x_p) \times y_r \; + \; (x_q \times y_p - x_p \times y_q) > \; 0 \; ?$$

quelques soustractions et multiplications, facile !

L'ordinateur ne calcule pas juste !

Arrondi à 15 chiffres décimaux

$$\begin{aligned} 100/3 &= 33.3333333333333333333\ldots \quad \text{suite infinie} \\ &\simeq 33.3333333333333 \end{aligned}$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

modèle à 2 chiffres décimaux

$$35 + 3.7 = 38.7$$

$$(35 + 3.3) + 0.4 \simeq 38$$
$$35 + (3.3 + 0.4) \simeq 39$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(y_p - y_q) \times x_r \; + \; (x_q - x_p) \times y_r \; + \; (x_q \times y_p - x_p \times y_q) > \; 0 \,?$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(y_p - y_q) \times x_r \; + \; (x_q - x_p) \times y_r \; + \; (x_q \times y_p - x_p \times y_q) > \; 0 \;?$$

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \; - \; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \; > 0 \;\; ?$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \; - \; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \; > 0 \quad ?$$

$p(-94, 0); \quad q(400, 180); \quad r(92, 68)$

$$(400 + 94) \quad \times \quad 68 \quad - \quad (92 + 94) \quad \times \quad 180 \quad = \quad \text{112 correct}$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \; - \; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \; > 0 \;\; ?$$

$p(-94, 0); \quad q(400, 180); \quad r(92, 68)$

$$\begin{array}{ccccccccc} (400+94) & \times & 68 & - & (92+94) & \times & 180 & = & \text{112 correct} \\ 494 & \times & 68 & - & 186 & \times & 180 & \simeq & \end{array}$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \; - \; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \; > 0 \; ?$$

$p(-94, 0); \quad q(400, 180); \quad r(92, 68)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(400+94) & \times & 68 & - & (92+94) & \times & 180 & = & \text{112 correct} \\
494 & \times & 68 & - & 186 & \times & 180 & \simeq & \\
490 & \times & 68 & - & 190 & \times & 180 & = &
\end{array}$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \; - \; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \; > 0 \; ?$$

$p(-94, 0); \quad q(400, 180); \quad r(92, 68)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(400 + 94) & \times & 68 & - & (92 + 94) & \times & 180 & = & 112 \text{ correct} \\
494 & \times & 68 & - & 186 & \times & 180 & \simeq & \\
490 & \times & 68 & - & 190 & \times & 180 & = & \\
33320 & & & - & 34200 & & & \simeq &
\end{array}$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \; - \; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \; > 0 \;\; ?$$

$p(-94, 0); \quad q(400, 180); \quad r(92, 68)$

$$
\begin{array}{cccccccl}
(400+94) & \times & 68 & - & (92+94) & \times & 180 & = \; 112 \text{ correct} \\
494 & \times & 68 & - & 186 & \times & 180 & \simeq \\
490 & \times & 68 & - & 190 & \times & 180 & = \\
33320 & & & - & 34200 & & & \simeq \\
33000 & & & - & 34000 & & & =
\end{array}
$$

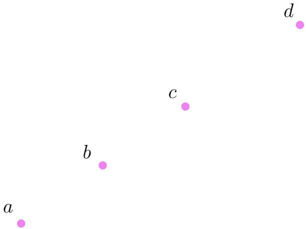
L'ordinateur ne calcule pas juste !

$$(x_q - x_p) \times (y_r - y_p) \;-\; (y_q - y_p) \times (x_r - x_p) \;\color{magenta}{> 0} \;\; ?$$

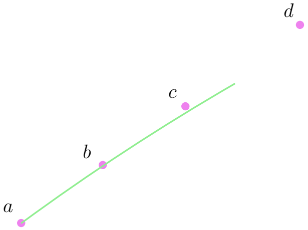
$p(-94, 0);\quad q(400, 180);\quad r(92, 68)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(400+94) & \times & 68 & - & (92+94) & \times & 180 & = & \color{magenta}{112 \text{ correct}} \\
494 & \times & 68 & - & 186 & \times & 180 & \color{purple}{\simeq} & \\
\color{purple}{490} & \times & 68 & - & \color{purple}{190} & \times & 180 & = & \\
33320 & & & - & 34200 & & & \color{purple}{\simeq} & \\
\color{purple}{33000} & & & - & \color{purple}{34000} & & & = & \\
 & & & & & & & = & \color{magenta}{-1000 \;\; !!}
\end{array}$$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

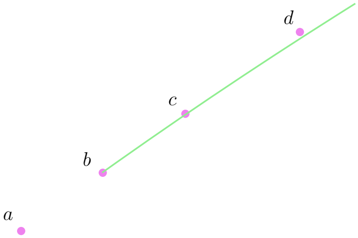


L'ordinateur ne calcule pas juste !



c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

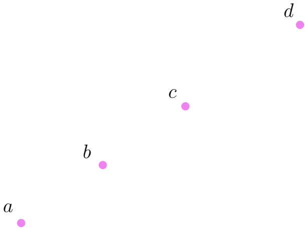
L’ordinateur ne calcule pas juste !



c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$

L'ordinateur ne calcule pas juste !

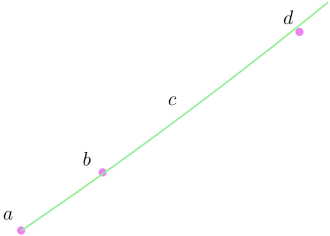


c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$

donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

L'ordinateur ne calcule pas juste !



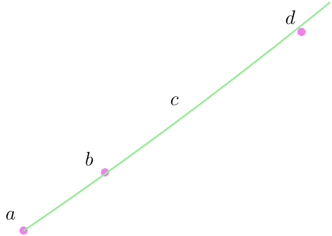
c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$

donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

calculs arrondis $\longrightarrow$ l'ordinateur trouve le contraire

L'ordinateur ne calcule pas juste !

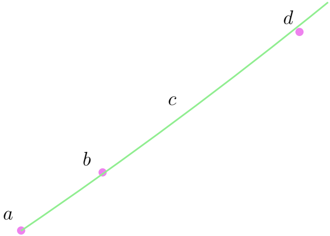


c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$
d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$
donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

calculs arrondis $\longrightarrow$ l'ordinateur trouve le contraire

échec !

L'ordinateur ne calcule pas juste !



c à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

d à gauche de $\overrightarrow{(bc)}$

donc d à gauche de $\overrightarrow{(ab)}$

calculs arrondis $\longrightarrow$ l'ordinateur trouve le contraire

solution : contrôler les erreurs d'arrondi

Part VII

Dans l’espace

Dans $\mathbb{R}^3$

Tétraédrisation de Delaunay

Même algorithme que dans $\mathbb{R}^2$

triangles
$\longrightarrow$ tétraèdres

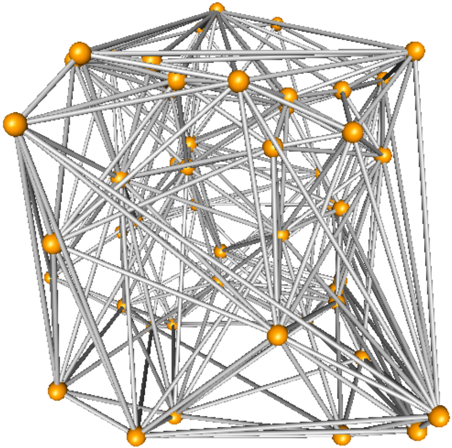
disques vides
$\longrightarrow$ boules vides

Dans $\mathbb{R}^3$

Tétraédrisation de Delaunay

triangles
$\longrightarrow$ tétraèdres

disques vides
$\longrightarrow$ boules vides

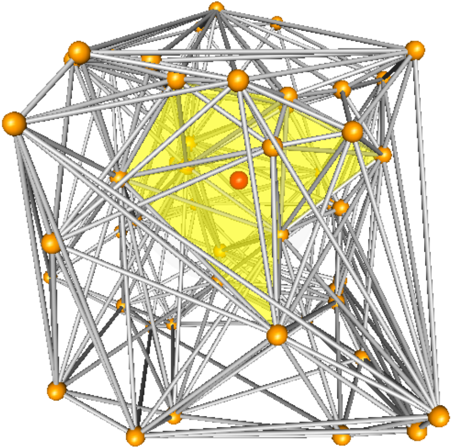


Dans $\mathbb{R}^3$

Tétraédrisation de Delaunay

triangles
$\longrightarrow$ tétraèdres

disques vides
$\longrightarrow$ boules vides



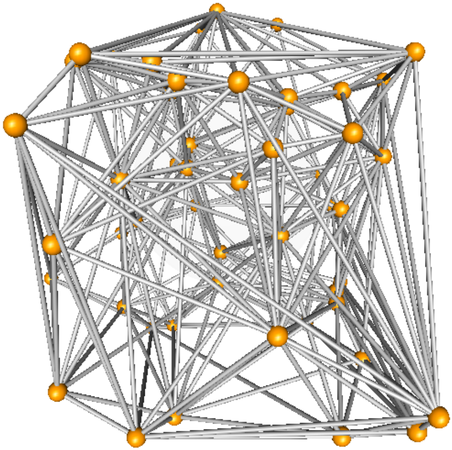
trouver les tétraèdres en conflit

Dans $\mathbb{R}^3$

Tétraédrisation de Delaunay

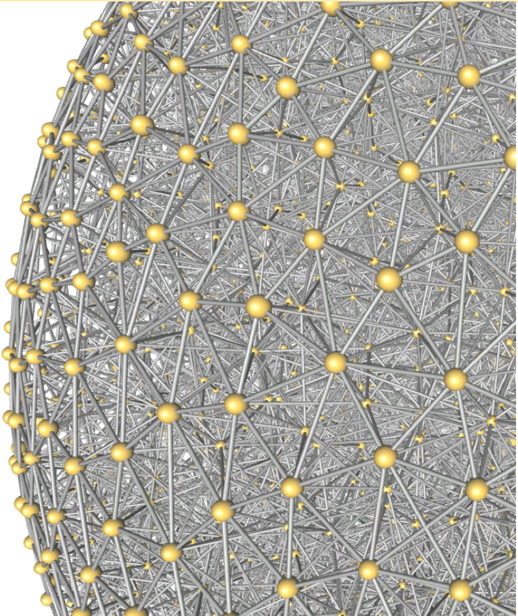
triangles
$\longrightarrow$ tétraèdres

disques vides
$\longrightarrow$ boules vides



étoiler la région autour du point

Dans $\mathbb{R}^3$



Part VIII

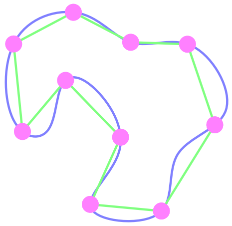
Application : maillages

Dans le plan $\mathbb{R}^2$

S = "forme" = courbe

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

but : approcher S par un polygone



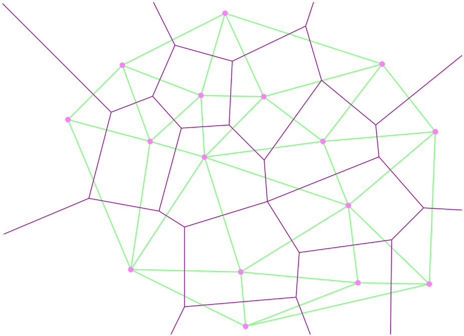
Dans le plan $\mathbb{R}^2$

S = "forme" = courbe

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

but : approcher S par un polygone

outils :



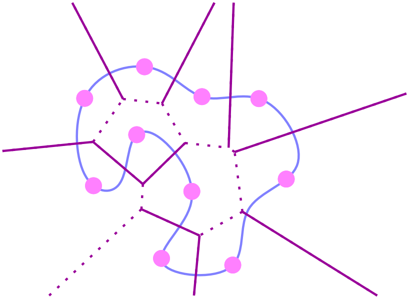
Dans le plan $\mathbb{R}^2$

S = "forme" = courbe

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

but : approcher S par un polygone

arêtes
du diagramme de Voronoï
qui coupent S



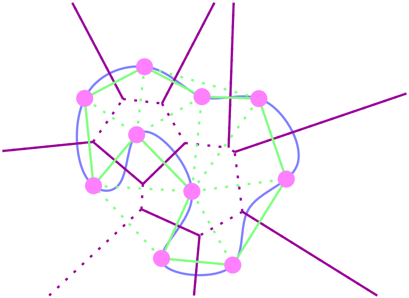
Dans le plan $\mathbb{R}^2$

S = "forme" = courbe

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

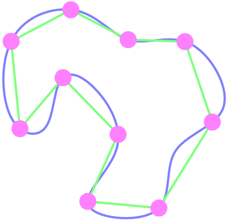
but : approcher S par un polygone

arêtes de la
triangulation de Delaunay
associées



Dans le plan $\mathbb{R}^2$

S'il y a assez de points,
on obtient une bonne approximation de S



Dans l'espace $\mathbb{R}^3$

S = "forme" = surface

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

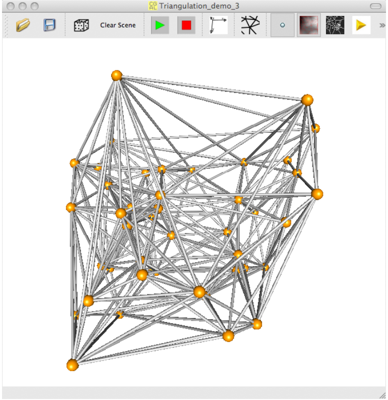
but : approcher S par des triangles

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$

S = "forme" = surface

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

but : approcher S par des triangles



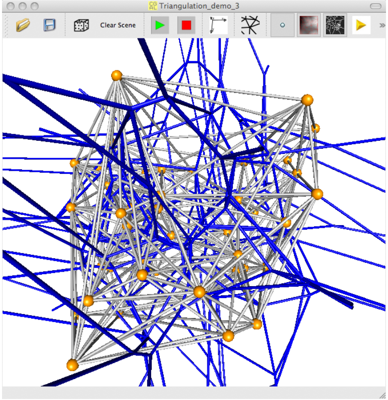
outils :

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$

S = "forme" = surface

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

but : approcher S par des triangles



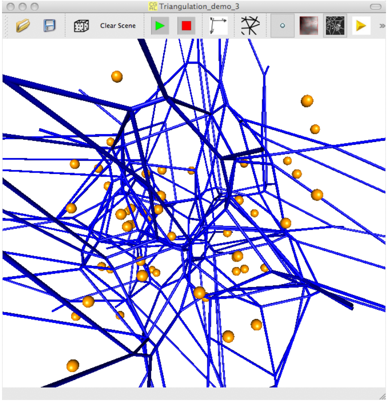
outils :

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$

S = "forme" = surface

$P = \{$ points mesurés sur la forme S $\}$

but : approcher S par des triangles



outils :

Algorithme

$P = \{$ points mesurés sur la surface S $\}$

- Calculer la tétraédrisation de Delaunay de P

Algorithme

$P = \{$ points mesurés sur la surface S $\}$

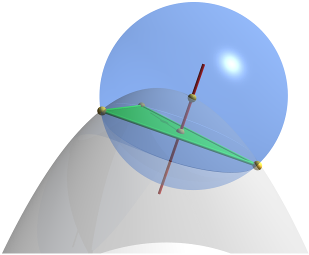
- Calculer la tétraédrisation de Delaunay de P
- tant qu'il reste un mauvais triangle T

Algorithme

$P = \{$ points mesurés sur la surface S $\}$

- Calculer la tétraédrisation de Delaunay de P
- tant qu'il reste un mauvais triangle T

- calculer l'arête de Voronoï A associée à T
- ajouter le point $A \cap S$ dans P et dans sa tétraédrisation de Delaunay

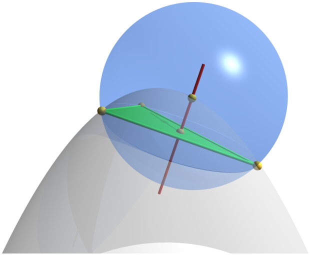


Algorithme

$P = \{$ points mesurés sur la surface S $\}$

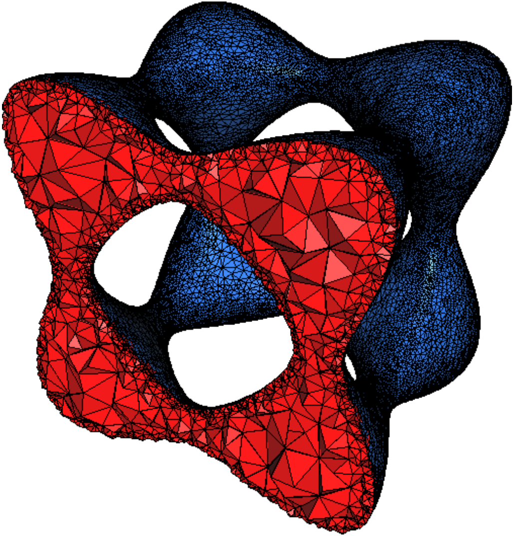
- Calculer la tétraédrisation de Delaunay de P
- tant qu'il reste un mauvais triangle T

- calculer l'arête de Voronoï A associée à T
- ajouter le point $A \cap S$ dans P et dans sa tétraédrisation de Delaunay

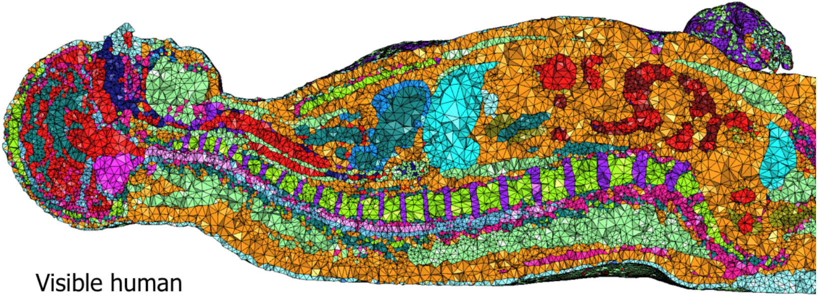


maillage de S = $\{$ triangles de la tétraédrisation de Delaunay dont l'arête de Voronoï associée coupe S $\}$

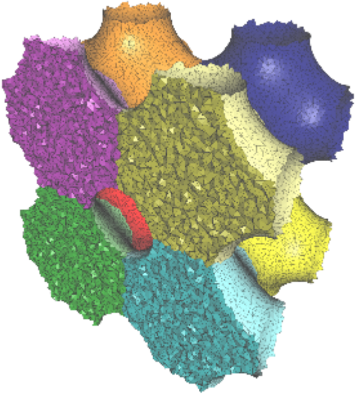
Résultats

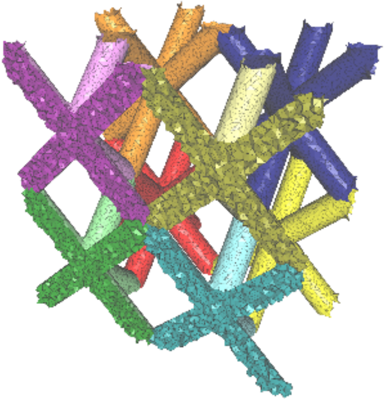


Résultats



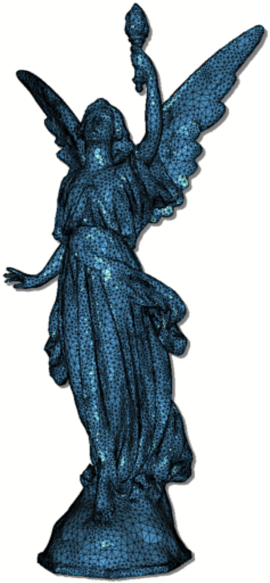
Résultats





données Maarten Moesen

Résultats



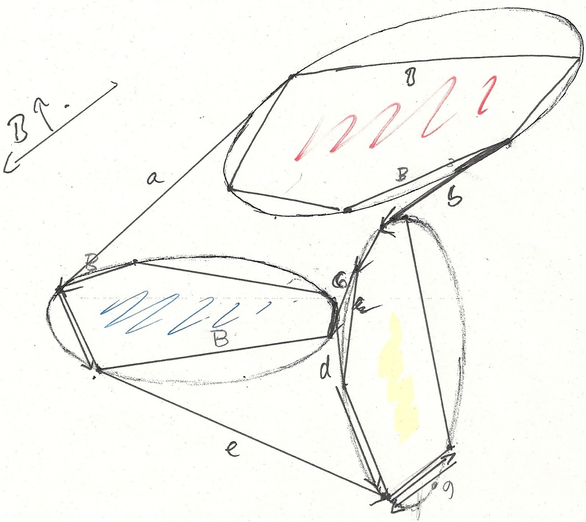
Part IX

Qu’est-ce qu’un chercheur ?

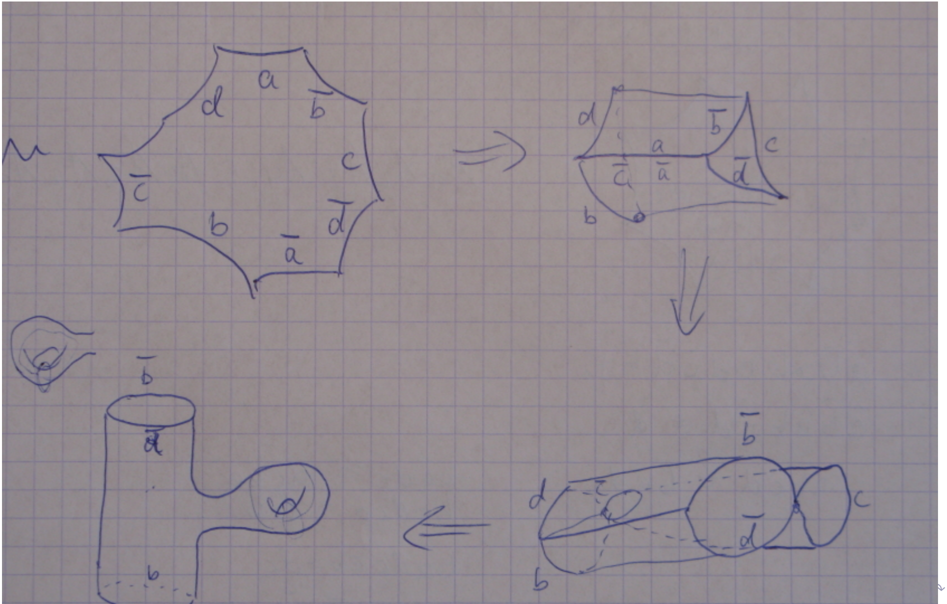
C’est quelqu’un qui. . .

- cherche des financements
- fait de l’administration
- . . .

C'est quelqu'un qui… cherche…



C'est quelqu'un qui. . . cherche. . .



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k & x_l & x_m \\ y_i & y_j & y_k & y_l & y_m \\ z_i & z_j & z_k & z_l & z_m \\ t_i+\varepsilon^{n-i} & t_j+\varepsilon^{n-j} & t_k+\varepsilon^{n-k} & t_l+\varepsilon^{n-l} & t_m+\varepsilon^{n-m} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & D(s_i, s_j, s_k, s_l, s_m) \\ & + O(p_i, p_j, p_k, p_l)\varepsilon^{n-m} - O(p_i, p_j, p_k, p_m)\varepsilon^{n-l} \\ & + O(p_i, p_j, p_l, p_m)\varepsilon^{n-k} - O(p_i, p_k, p_l, p_m)\varepsilon^{n-j} \\ & + O(p_j, p_k, p_l, p_m)\varepsilon^{n-i} \end{aligned}$$

C'est quelqu'un qui. . . cherche. . .

$$
\begin{aligned}
\eta(n) &= \sum_{i=1}^{n} \nu(i) \\
&= O\left(\sum_{i=1}^{n} i^{\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1}\right) \\
&= O\left(n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}\right)
\end{aligned}
$$

C'est quelqu'un qui. . . progresse

Triangulation de Delaunay

1992
- $\mathbb{R}^2$: 15000 points en 30 secondes (avec échecs potentiels)

2010
- $\mathbb{R}^2$: 10 millions de points en 12 secondes
- $\mathbb{R}^3$: 1 million de points en 10 secondes (avec un résultat garanti)

(les ordinateurs ont évolué aussi)

Computing 3D Periodic Triangulations☆

Manuel Caroli[a], Monique Teillaud[a]

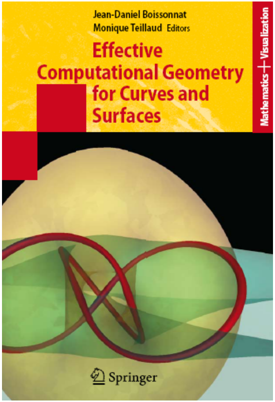
[a] *INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée*
2004 Route des Lucioles, F-06902 Sophia Antipolis CEDEX, France

---

Abstract

This work is motivated by the need for software computing 3D periodic triangulations in numerous domains including astronomy, material engineering, biomedical computing, fluid dynamics etc. We give a definition for the Delaunay triangulation of the 3D flat torus defined by a set of points, and we propose an incremental algorithm that computes it without duplicating any point, whenever possible. During the computation of the triangulation, the algorithm detects when such a duplication can be avoided: It uses a simple geometric criterion to test whether a partition of the 3D flat torus actually forms a triangulation (which subsumes that it is a simplicial complex). This is usually the case in practical situations. Additionally, even in cases where point duplication

C’est quelqu’un qui. . . publie



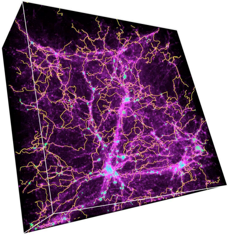
```
template < class Gt, class Tds >
typename Delaunay_triangulation_3<Gt,Tds>::Vertex_handle
Delaunay_triangulation_3<Gt,Tds>::
insert(const Point & p, Locate_type lt, Cell_handle c,
                      int li, int lj)
{
  switch (dimension()) {
  case 3:
    {
      Conflict_tester_3 tester(p, this);
      Vertex_handle v =
         insert_in_conflict(p, lt, c, li, lj,
                              tester, hidden_point_visitor);
      return v;
    }// dim 3
  }
...
}
```

C’est quelqu’un dont. . . le travail est utilisé

The persistent cosmic web and its filamentary structure

T. Sousbie,
Department of Physics, The University of Tokyo
Institut d’astrophysique de Paris

“we use the periodic exact 3D periodic boundary conditions Delaunay tessellation (Caroli & Teillaud 2010)”



Code intégré à MATLAB,
outil de calcul scientifique untilisé internationalement.

photo site web INRIA

[photo Mridul Aanjaneya]

[photo Manuel Caroli]

[photo Vissarion Fisikipoulos]

[photo Mikhail Bogdanov]

et les autres. . .

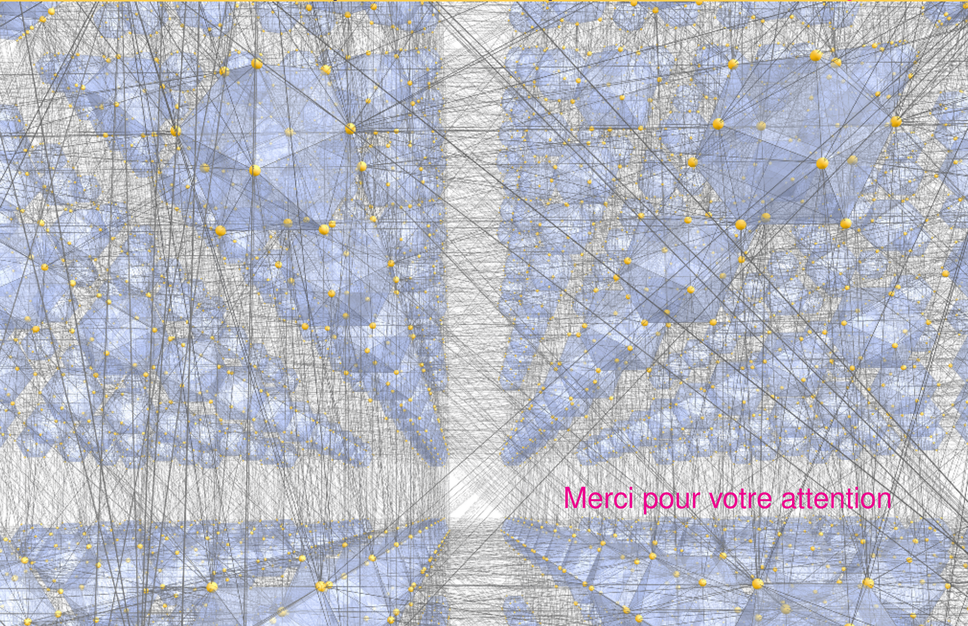
C'est quelqu'un qui. . . donne des conférences

Bernard Chazelle, *photo Tsinghua University, Chine*

C’est quelqu’un qui. . . participe à des “réunions”

[photo : dîner à Kobe, Japon, pendant ICMS’10]

. . . et qui va même parfois dans des lycées



Merci pour votre attention