

Exercice 1 : Calcul du tarif d'affranchissement d'une lettre

Le but de cet exercice est d'écrire une fonction calculant le tarif d'affranchissement d'une lettre de moins de 100 g. pour les envois en France. Les tarifs (en FF.) sont donnés par le tableau suivant :

Poids jusqu'à	Ordinaire	R1	R2	R3
20 g.	2,80	18,80	20,80	25,80
50 g.	4,40	20,40	22,40	27,40
100 g.	6,70	22,70	24,70	29,70

La colonne ordinaire correspond à des envois ordinaires, les colonnes R1, R2, R3 à trois tarifs en recommandé. Ces formes d'envois seront respectivement codées en CAML par les chaînes de caractères "ordinaire", "R1", "R2", "R3".

1. Définir la fonction `tarif_normal`, qui calcule le tarif d'envoi ordinaire, en complétant le code suivant :

```
let tarif_normal = function poids ->
  if (poids > 0.) & (poids <= 20.)
  then RES-1-1
  else if (poids > 20.) & (poids <= 50.)
  then RES-1-2
  else if (poids > 50.) & (poids <= 100.)
  then RES-1-3
  else failwith ( "tarif_normal: poids" ^
                  " hors gabarit (0-100 g.)" );;
```

Écrire des fonctions `tarif_R1`, `tarif_R2` et `tarif_R3` analogues à `tarif_normal`, pour les cas des tarifs des envois en recommandé.

2. Compléter la fonction `tarif` suivante, qui permet de calculer le tarif d'affranchissement d'une lettre, connaissant son poids et le code du tarif. N'hésiter pas à utiliser les fonctions de la question précédente pour cela.

```
let tarif = function poids ->
  function "ordinaire" -> RES-2-1 |
    "R1"                -> RES-2-2 |
    "R2"                -> RES-2-3 |
    "R3"                -> RES-2-4 |
    _                   -> failwith "tarif: tarif inconnu";;
```

3. Tester la fonction `tarif`, en vérifiant le résultat fourni dans tous les cas possibles.

Exercice 2 : Manipulation de fonctions

Rappel : Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, on considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une telle fonction f est dérivable en x si et seulement si $\lim_{dx \rightarrow 0} (f(x + dx) - f(x)) / dx$ existe, ce nombre étant alors appelé la dérivée de f en x . La fonction f' , dérivée de la fonction f , est la fonction qui à x fait correspondre la dérivée de f en x , lorsque cette dérivée existe.

1. Écrire une fonction `derive`, de type `float -> (float -> float) -> float -> float`, qui étant donnés un réel `dx`, une fonction `f` et un nombre `x`, calcule l'expression $(f(x + dx) - f(x)) / dx$.

On remarquera que `derive dx f` fournit seulement une approximation de f' .

2. Soit l'opération $\oplus$ qui calcule la somme de deux fonctions : si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $f \oplus g$ est la fonction, appelée somme de f et de g , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

Écrire une fonction `somme_func` modélisant l'opération $\oplus$, dont le type en CAML sera de la forme `('a -> float) -> ('a -> float) -> 'a -> float`. Expliquer ce typage.

3. On considère la fonction sinus (`sin` en CAML). On sait que la dérivée seconde de cette fonction est son opposée (la fonction `- sin`). Écrire une fonction `h`, calculant la différence entre la dérivée seconde exacte de cette fonction et la dérivée seconde obtenue grâce à la fonction `derive`. Cette fonction `h` aura comme type `float -> float -> float` et, pour des appels de la forme `h dx`, elle rendra une fonction égale à la différence (au sens des fonctions, cf. la question précédente) entre les fonctions dérivées secondes exacte et approchée de la fonction sinus. On demande que cette fonction utilise la fonction `somme_func`.
4. Définir les fonctions `h2`, `h4` et `h6`, correspondant à des appels de `h` avec comme paramètres respectifs 10^{-2} , 10^{-4} et 10^{-6} . Compléter ensuite le tableau suivant :

x	0	$\pi / 4$	$\pi / 2$	$3 \pi / 4$	π
$h2(x)$					
$h4(x)$					
$h6(x)$					

Pour calculer π , utiliser la formule $\pi = 4 * \arctan 1$ (en CAML, la fonction `arctan` s'écrit `atan : float -> float`).