—— INFORMATIQUE — Deug MIAS & SM 1 — TP 3 ——

Fonctions récursives

Dans ce TP, on utilisera la fonction `somme` vue en TD, telle que `somme f m n` calcule la somme $\sum_{i=n}^{m} f(i)$. Commencer par définir cette fonction.

Exercice 1 : Calcul de π

Formule de Leibniz

La série suivante converge (très lentement) vers $\pi/8$:

$$\frac{1}{1*3} + \frac{1}{5*7} + \frac{1}{9*11} + \ldots$$

1. En déduire une fonction `somme_pi : int -> float` calculant une approximation de π pour un nombre donné `n` de termes.
   On utilisera les fonctions `somme` et f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ i & \mapsto \quad \frac{1}{(4i+1).(4i+3)} \end{cases}$$

2. Cette fonction `somme_pi` étant programmée, déterminer expérimentalement combien de termes sont nécessaires pour calculer π avec trois chiffres significatifs (c'est-à-dire une précision de 10^{-2}).

Calcul d'intégrale par la méthode des trapèzes

La formule des trapèzes permet de calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f entre a et b:

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \simeq \quad h * \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i * h) \right]$$

où n est un entier et $h = (b - a)/n$.

1. Écrire la fonction `trapeze : float -> float -> int -> (float -> float) -> float`, telle que `trapeze a b n f` modélise le calcul précédent.
   Utiliser pour cela la fonction `somme` définie en début de TP.
2. Utiliser la fonction `trapeze` pour calculer une approximation de π en utilisant la formule :

$$\pi = 4 \arctan 1 = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$$

3. Trouver expérimentalement la valeur de `n` pour laquelle on obtient π avec une précision de 10^{-4}.

Exercice 2 : Calcul de la fonction exponentielle

Un moyen de calculer la fonction exponentielle est d'utiliser son développement en série, c'est-à-dire de la définir comme la somme infinie des termes de la suite de terme général $u_k(x) = x^k/k!$. On a donc :

$$\exp(x) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

On note $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la suite : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

1. Écrire sous forme récursive la fonction Caml `serie_exp : int -> float -> float`, telle que `serie_exp n x` calcule la somme $S_n(x)$. On définira d'abord la fonction récursive `terme : int -> float -> float`, telle que `terme n x` modélise le calcul du terme $u_k(x)$.

2. Écrire la fonction `diff : int -> float -> float`, telle que `diff n x` calcule la différence entre la fonction exponentielle (prédéfinie en Caml sous la forme `exp : float -> float`) et la valeur retournée par `serie_exp n x`.

3. Remplir le tableau suivant avec les valeurs calculées par la fonction `diff` pour les valeurs correspondantes de `x` et `n` :

$x \setminus n$	5	10	20	30
1.0				
3.0				
5.0				
10.0				

4. **Question subsidiaire (optionnelle) :** dans la question 1 de cet exercice, la fonction `serie_exp` n'est pas définie au mieux ; en effet, elle est basée sur une récursion faisant elle-même appel à une récursion (par la fonction `terme`) ; proposer une fonction plus efficace `serie2_exp`, n'utilisant qu'un seul appel récursif en transformant le terme précédent de manière à calculer le nouveau terme (à partir de la formule $u_{k+1}(x) \;=\; x \,.\, u_k(x) \;/\; (k+1)$).

Voila, bon courage. En cas de problème, ne pas hésiter à me poser des questions à l'adresse `Alexis.Scheuer@loria.fr`.