—— INFORMATIQUE — MIAS/SM 1 — TP 5 ——

Produits cartésiens

Exercice 1 : Résistance d'un circuit

On se propose de modéliser les résistances par des produits cartésiens associant la valeur d'une résistance avec l'incertitude sur cette valeur. Pour rappel, la résistance équivalente à l'association de deux résistances a pour caractéristiques :

- $(R, \Delta R) = (R_1 + R_2, \Delta R_1 + \Delta R_2)$ en série,
- $(R, \Delta R) = \left(\dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}, \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \times \Delta R_1 + \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \times \Delta R_2 \right)$ en parallèle.

1. Écrire les fonctions `serie` et `parallele` permettant de déterminer les caractéristiques de la résistance équivalente à des montages en série et en parallèle de deux résistances.

2. Écrire l'expression permettant de calculer la résistance équivalente au circuit indiqué dans la figure 1, les différentes résistances valant $R_1 = 25 \pm 1\ \Omega$, $R_2 = 100 \pm 1\ \Omega$, $R_3 = 100 \pm 5\ \Omega$, $R_4 = 1000 \pm 10\ \Omega$.

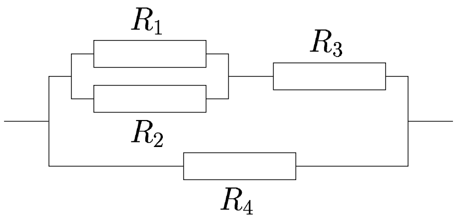

FIG. 1 – *Un circuit de résistances*

Exercice 2 : Chez le papetier

En papeterie, le format d'une feuille de papier est indiqué par le terme An. À un n donné correspond une largeur et une hauteur de feuille : par exemple, le format A4 est de dimension $21 \times 29{,}7$ cm. Le calcul de la hauteur et de la longueur d'une feuille de format An, $n \geq 0$, est défini par récurrence sur n, de la façon suivante :

$$\mathrm{A}n = \ \textbf{si}\ (n = 0)\ \textbf{alors}\ (l_0, h_0)\ \textbf{sinon}\ \texttt{reduit}(\mathrm{A}(n-1)),$$

où l_0 et h_0 sont respectivement la largeur et la hauteur d'une feuille A0. La fonction `reduit` permet le calcul des dimensions d'une feuille de format An à partir de celles d'une feuille de format A$(n-1)$, selon les formules $l_n = h_{n-1}/2$ et $h_n = l_{n-1}$.

1. Écrire en Caml la fonction `reduit`, de type `float * float -> float * float`.

2. En déduire la fonction `format` permettant de calculer récursivement les dimensions d'une feuille quelconque.

3. Quelles sont les dimensions des feuilles de format An, pour $n \in \{0,...,5\}$?

Exercice 3 : Résolution d'équations différentielles par la méthode d'Euler

Nous considérons dans cet exercice des équations différentielles du premier ordre du type $y' = f(x, y)$, avec comme valeur initiale $y(x_0) = y_0$. On suppose que la régularité de f est telle qu'elle nous assure l'existence et l'unicité d'une solution y passant par (x_0, y_0). La méthode d'Euler consiste à calculer une suite de points en prenant comme pente du segment $[(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)]$ la quantité $f(x_{n-1}, y_{n-1})$.

La solution est alors approchée par la suite des valeurs :

$$\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} x_n &= x_0 &+ n\,h \\ y_n &= y_{n-1} &+ h\,f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

où h est un nombre petit par rapport à la longueur de l'intervalle sur lequel on veut résoudre l'équation différentielle.

1. Écrire une fonction `s` de type `float -> float -> float -> (float -> float -> float) -> int -> float` qui, pour un appel `s x0 y0 h f n`, calcule la valeur de y_n en utilisant la formule donnée plus haut.

2. Écrire une fonction `euler` de type `float -> float -> float -> (float -> float -> float) -> float -> float` telle qu'un appel `euler x0 y0 h f` renvoie la fonction solution approchée de l'équation différentielle correspondant ($y' = f(x, y)$ passant par (x_0, y_0)).
   Pour cette fonction, qui à x associe y, la valeur du nombre n de pas de discrétisation sera déterminé en fonction de x par la formule $n = \lfloor |x - x_0| \;/\; h \rfloor$ ($\lfloor z \rfloor$ étant la partie entière de z). On supposera alors que $x = x_n$ et $y = y_n$.
   Pour modéliser la fonction `euler`, on utilisera les fonctions prédéfinies `abs_float` et `int_of_float`, qui renvoient respectivement la valeur absolue et la partie entière d'un nombre réel.

Application : Résolution de l'équation différentielle $y' = y$, avec comme condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Calculer les fonctions fi, $1 \leq i \leq 3$, correspondant à la solution approchée de l'équation différentielle précédente pour des valeurs de `h` égales à 10^{-i}, et comparer avec la solution exacte de l'équation différentielle aux points d'abscisse $1/2$, 1 et 5.