

## Arbres et mobiles

Dans cette séance, nous nous intéressons à la modélisation de mobiles décoratifs tels que celui de la figure 1 (créé par J. Mitchell<sup>1</sup>).



FIG. 1 – *Exemple de mobile*

Ces mobiles sont constitués d'une barre, suspendue à un fil, aux extrémités de laquelle sont suspendus soit un mobile, soit un élément décoratif. Tout le problème de la construction de tels mobiles est de s'assurer que les différentes barres restent horizontales.

### Première modélisation du problème

La propriété qui nous intéresse est l'équilibre statique du mobile. Dans un premier temps, nous allons négliger la masse des fils de suspension ainsi que celle des barres. Un mobile est en équilibre si tous ses éléments respectent la loi des moments, soit  $P_g L_g = P_d L_d$  où  $P_g$  (resp.  $P_d$ ) est le poids du mobile suspendu à l'extrémité gauche (resp. droite) et  $L_g$  (resp.  $L_d$ ) la longueur entre le point de suspension et l'extrémité gauche (resp. droite) de la barre du mobile.

Les mobiles que nous considérons peuvent avoir une des deux formes suivantes :

- soit c'est un objet décoratif, dont la modélisation peut se limiter à la masse,
- soit c'est une barre avec deux mobiles suspendus à ses extrémités, ce qui est modélisé par un quadruplet  $(l, r, M_g, M_d)$  où  $l$  est la longueur totale de la barre ( $L_g + L_d$ ),  $r$  est le rapport entre la longueur gauche et la longueur totale ( $L_g = rl$  et  $L_d = (1 - r)l$ ) et  $M_g$  et  $M_d$  sont les deux mobiles suspendus.

---

1. <http://www.glassmobiles.com>.

La masse d'un mobile contenant une barre est égale à la somme des masses des mobiles suspendus (lorsque la masse de la barre est négligeable). Par convention, nous modéliserons toujours le mobile le plus lourd à gauche, ce qui induira  $0 \leq r \leq 0.5$ .

En Caml, un mobile sera représenté par une valeur du type :

```
type mobile = Objet of float |
              Barre of float * float * mobile * mobile ;;
```

Vous trouverez sur `jupiter` dans le fichier `Info Mias-SM\Caml\tp9.ml` la définition du type `mobile` ainsi que des fonctions permettant de dessiner à l'écran un mobile. Copiez ce fichier dans un répertoire personnel. Interprétez les fonctions définies dans ce fichier, y compris les définitions des cinq mobiles et l'affichage du cinquième (commande `dessine_mobile m5 ;;`). Vérifiez que la visualisation correspond à la définition, et que le mobile est équilibré.

## Un premier mobile

Définissez de même le mobile équilibré contenant (*ul* représentant une unité de longueur quelconque) :

- une barre de 200 *ul* à laquelle sont suspendus
  - un objet de 300 g et
  - une barre de 150 *ul* à laquelle sont suspendus
    - un objet de 250 g
    - une barre 100 *ul* à laquelle sont suspendus un objet de 200 g et un objet de 300 g.

Vérifiez que votre mobile est bien équilibré.

## Construction de mobiles équilibrés

L'objet des fonctions suivantes est de construire automatiquement des mobiles équilibrés.

1. Définissez une fonction de profil `construit_objet: float -> mobile` qui, étant donné une masse, construit un mobile constitué d'un seul objet ayant cette masse.
2. Définissez une fonction récursive de profil `masse: mobile -> float` qui, étant donné un mobile, calcule sa masse totale.
3. Définissez une fonction de profil `calcule_ratio: mobile -> mobile -> float` qui, étant donné deux mobiles, calcule le ratio garantissant l'équilibre entre ces deux mobiles.
4. Définissez une fonction de profil `construit_mobile: float -> mobile -> mobile -> mobile` qui, étant donné une longueur et deux mobiles, construit le mobile équilibré contenant les deux mobiles accrochés à une barre dont la longueur est donnée. N'oubliez pas de mettre le mobile le plus lourd à gauche.

.../...

5. Redéfinissez le mobile de la partie précédente en utilisant les fonctions `construit_point` et `construit_mobile`. Obtenez-vous un résultat identique?

## Vérification de l'équilibre d'un mobile

Écrivez un prédicat de profil `equilibre: mobile -> bool` qui teste si un mobile donné est équilibré.

Le mobile défini par `Barre (100., 1./3., (Objet 200.), (Objet 100.))` devrait être équilibré. Votre prédicat donne-t-il la bonne réponse? Sinon, pourquoi? Pouvez-vous le corriger?

## Une seconde modélisation

Dans la réalité, si les fils sont effectivement négligeables, les barres le sont moins. En supposant qu'elles sont toutes de même section et fabriquées dans le même matériau caractérisé par une masse linéique (poids par unité de longueur) de  $m_l$ , l'équation d'équilibre devient :

$$P_g L_g + \int_0^{L_g} x m_l dx = P_d L_d + \int_0^{L_d} x m_l dx$$

Modifiez toutes les fonctions pour prendre en compte cette modélisation plus précise.