Première partie : matrices sous tableur

Cette séance de travaux pratiques va commencer par quelques manipulations de matrices sous tableur `Excel`, pour résoudre des systèmes d'équations ou représenter des graphes. On va commencer par quelques rappels, avant de considérer trois exercices.

Quelques notions préliminaires

Le tableur `Excel` distingue deux types de tableaux :

- les tableaux généraux, correspondant à une plage rectangulaire de cellules qui peuvent être vides, ou contenir tout type de données, ou
- les matrices, dont les cellules ne peuvent contenir que des nombres.

Parmi les fonctionnalités proposées par `Excel`, on trouve des fonctions opérant sur un ensemble de cellules, qui sont applicables aux tableaux généraux et aux matrices. D'autres ne sont applicables qu'aux tableaux généraux et aux matrices, enfin certaines sont réservées aux matrices.

Quand une fonction a pour résultat un tableau ou une matrice, il convient de sélectionner auparavant la plage de cellules devant contenir le résultat, de taper la formule de la fonction (précédée du signe " = ") et de valider en appuyant simultanément sur les touches `Ctrl`, `Shift` (ou ⇑) et `Entrée`. La formule s'entoure alors d'accolades et la plage de cellules sélectionnée se remplit.

Parmi les fonctions proposées sur les tableaux et les matrices, on trouve :

TRANSPOSE :	tableau	donne la transposée d'un tableau
PRODUITMAT :	matrice	calcule le produit de deux matrices
INVERSEMAT :	matrice	donne l'inverse d'une matrice
DETERMAT :	matrice	donne le déterminant d'une matrice

Ces fonctions sont disponibles depuis l'AutoPilote de fonctions.

Résolution d'un système d'équations

Lorsqu'un système d'équations est écrit sous la forme d'un produit matriciel $A.X = B$, où X est le vecteur des inconnues, la solution lorsqu'elle existe est unique et donnée par la formule $X = A^{-1}.B$. Ainsi, par exemple, pour résoudre le système de trois équations à trois inconnues x, y et z suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y & = & 2 \\ 3x + z & = & -1 \\ x - 2y + 4z & = & 3 \end{cases}$$

on utilise deux matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sous `Excel`, si on écrit la matrice A dans la plage de cellules `B2:D5` et la matrice B dans la plage de cellules `F2:F5`, le résultat est obtenu par la formule :

`PRODUITMAT(INVERSEMAT(F2 : F5); B2 : D5)`

Cette formule étant définie pour une plage de trois cellules superposées, elle est validée par les touches `Ctrl`, `Shift` et `Entrée`. La formule est alors encadrée par des accolades (`{` et `}`) et les cellules superposées se remplissent des résultats ($x = -0.8$, $y = 0.9$ et $z = 1.4$).

Exercice 1-1 : Résolution d'un système d'équations

Après avoir essayé la méthode pour l'exemple proposé ci-dessus, résolvez de la même façon le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + z - t & = & 1 \\ x - 2y + u & = & 0 \\ y + z + t + u & = & 4 \\ -x + y - 2z & = & 3 \\ x - y + z - t + u & = & 1 \end{cases}$$

Vérifiez le résultat en calculant la différence (matricielle) entre les termes de droite des équations et ceux de gauche (autrement dit, la différence $A.X - B$ pour les matrices A et B associées au système, X étant la solution trouvée).

Exercice 1-2 : Une solution d'un système d'inéquations

Dans une cafétéria, on décide de fabriquer 4 sortes de coupes * de glace :

1. la première contient 3 boules de glace, 5 cl de chocolat, 10 cl de café et 20 g de raisins secs et se vend 20F,
2. la deuxième contient 2 boules de glaces, 8 cl de chocolat, 15 cl de café, 10 g de raisins secs, et se vend 15 F,
3. la troisième contient 1 boule de glace, 5 cl de chocolat, 5 cl de café et 10 g de raisins secs et se vend 12 F,
4. la dernière contient 1 boule de glace, 5 cl de chocolat et 10 g de raisins secs et se vend 10 F.

On ne dispose pour une journée que de 50 boules de glace, 2 litres de chocolat, 2 litres de café et 400 g de raisins secs. Combien de chaque sorbet peut-on préparer, si on considère ce système d'inéquations comme un système d'équations? Combien gagnerait-on alors?

La recherche du gain optimum en respectant ces inéquations est plus complexe. Pour cela, on peut cependant utiliser les matrices définies pour résoudre le problème précédent. Considérez quelques combinaisons de coupes, vérifiez d'un produit matriciel que chaque combinaison respecte les contraintes et calculez d'un produit scalaire le gain associé. Pouvez-vous amméliorer le résultat précédent, en faisant varier un par un le nombre de chaque coupe ? Essayez aussi de limiter la production à une seule coupe? Quel est le meilleur choix obtenu par ces essais?

Exercice 1-3 : Matrices d'adjacence

On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Cette matrice est ce qu'on appelle la *matrice d'adjacence* d'un graphe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que $M_{l,c}$ (la valeur à la ligne l et la colonne c de la matrice M) indique s'il existe un arc (une connexion orientée) reliant dans le graphe $\mathcal{G}$ le sommet l au sommet c.

1. Dessiner le graphe $\mathcal{G}$ correspondant à la matrice M. Pour cela, on disposera sur une feuille les sept sommets de $\mathcal{G}$, nommés de A à G, et on mettra une flèche pour chaque arc. On doit obtenir ainsi 9 flèches. Essayer de faire le graphe sans croisement de flèches.
2. Multiplier cette matrice M à droite par un vecteur colonne de 1. On obtient alors le *demi-degré extérieur* de chaque sommet, c'est-à-dire le nombre de sommets auxquels ce sommet est adjacent (c'est une colonne des totaux par ligne de M).
3. Multiplier cette matrice M à gauche par un vecteur ligne de 1. On obtient alors le *demi-degré intérieur* de chaque sommet, c'est-à-dire le nombre de sommets adjacents au sommet considéré (c'est une ligne des totaux par colonne de M).
4. Calculer M^2. Cette matrice correspond aux *chemins de longeur deux* : elle indique si un sommet peut être relié à un second, en passant par un (et un seul) sommet intermédiaire.
5. Calculer $I + M + M^2$, où I est la matrice identité. Cette matrice correspond aux chemins de longeur inférieure à deux, elle indique si un sommet peut être relié à un second, en passant par au plus un sommet intermédiaire.
6. Faire de même avec toutes les puissances de M. À quel moment le nombre de zéros dans cette série de puissances devient-il stationnaire ? La matrice obtenue est la *fermeture transitive* du graphe, qui indique tous les chemins possibles. Compléter le graphe $\mathcal{G}$ avec des flèches rouges, pour représenter sa fermeture transitive.
7. Pour que A soit connecté à tous les sommets du graphe, il suffit de rajouter au graphe $\mathcal{G}$ un arc. Lequel ? Quelle est la longueur du plus long chemin *non-cyclique* (c'est-à-dire ne contenant pas plusieurs fois le même sommet) issu du sommet A ?
8. Pour qu'en plus tout sommet du graphe soit connecté à A, quel(s) arc(s) faut-il encore rajouter ? Quelle est alors la longueur du plus long chemin non-cyclique menant au sommet A ?
9. Quelle est la longueur du plus court chemin contenant tous les sommets ?

Remarque : les longueurs trouvées aux trois dernières questions dépendent du choix des arcs ajoutés au graphe $\mathcal{G}$.

Seconde partie : graphiques en calcul scientifique

La seconde partie de cette séance de travaux pratiques va porter sur le logiciel `MuPAD`, dédié au calcul algébrique et à la résolution de problèmes scientifiques. La version pour Windows de ce logiciel est basé sur la notion de *carnet de notes* (ou `Notebook`). Lorsqu'on démarre ce logiciel (menu `Démarrer`, sous-menu `Programmes`, sous-sous-menu `MuPAD Pro 2.0`, option `MuPAD Pro`), une présentation complète de ses possibilités est ouverte sous la forme d'un tel carnet de notes. Parcourir cette présentation de manière à vous familiariser avec ce logiciel. Vous allez ensuite ouvrir un nouveau carnet de notes pour chacun des exercices suivants (raccourci `Ctrl-N`, bouton `Create a new notebook` ou option `New Notebook` du menu `File`).

Exercice 2-1 : manipulation de courbes 2D

Dans cet exercice, nous allons tracer les courbes du logarithme népérien, de la fonction exponentielle et de la fonction identité sur un même graphique, le but étant de mettre en évidence la symétrie des deux premières par rapport à la dernière.

Le plus simple pour tracer ces courbes consiste à ouvrir une scène 2D (menu `Insert`, option `2D Plot`). Un cadre grisé apparaît alors dans le carnet de notes. On peut éditer la scène décrite par ce cadre d'un double clic, ou en sélectionnant l'option `Edit` du sous-menu `Graphics Object` du menu contextuel ou du menu `Edit`. **Remarquez alors le changement de la barre des outils, qui passe de trois à une seule ligne !** Ce changement ne fait que refléter un changement plus fondamental : le logiciel `MuPAD` laisse la main à l'utilitaire `VCam`, qui gère les propriétés des scènes graphiques. Cela se traduit aussi par un changement de la barre des menus. Revenez à `MuPAD` en cliquant dans le carnet de notes (hors du cadre grisé), puis repassez à `VCam` d'un double clic sur la scène, pour observer le changement de la barre des outils.

Afin d'éviter toute confusion, il est préférable de bien dissocier ces deux outils. De plus, le menu `File` n'est pas mis correctement à jour lors de ce passage de `MuPAD` à `VCam`, ce qui empêche entre autre toute sauvegarde du graphique sous un autre format. Il nous parait donc préférable d'*ouvrir* la scène, au lieu de l'éditer, en sélectionnant l'option `Open` du sous-menu `Graphics Object` du menu contextuel ou du menu `Edit`. On voit alors apparaître une fenêtre spécifique à `VCam`, dans laquelle on retrouve la barre des outils sur une ligne précédemment découverte.

On va ensuite définir les courbes à tracer. Tapez `Ctrl-G`, utilisez l'avant-dernier bouton (`Set drawing properties for scene and objects`) ou sélectionnez l'option `Graphics Properties...` du menu `Edit`. Dans la boîte de dialogue `VCam Graphics Properties` qui apparaît alors, choisir l'onglet `Object Definition` et utilisez le bouton `New Curve` pour définir la première courbe, l'identité par exemple. Pour cela, indiquez que les fonctions définissant les coordonnées en `X` et en `Y` sont identiques et égales à `x`, ce paramètre variant entre -3 et 3. Validez la définition avec le bouton `OK`. Définissez de même le logarithme népérien et la fonction exponentielle (**attention** à ne définir la première que sur l'intervalle $]0,3]$).

Pour amméliorer ce graphique, nous allons ajouter quelques couleurs et des titres. Revenez pour cela à la boîte de dialogue `VCam Graphics Properties`. Dans l'onglet `Object Definition`, notez le numéro d'identification (`ID`) associé à chaque courbe, d'après les fonctions donnant les coordonnées. Passez ensuite à l'onglet `Object Style`, puis donnez un titre et une couleur différente à chaque courbe (vous pouvez revenir à l'onglet `Object Definition` sans changer de courbe pour trouver son nom). Utilisez le bouton `Appliquer` pour visualiser les résultats intermédiaires , puis le bouton `OK` pour terminer.

Vous remarquerez que le titre des courbes est placé de manière aléatoire. Vous pouvez utiliser le sixième bouton (`Move titles using the mouse`), ou l'option `Move Titles` du menu `Tools`, pour les placer correctement. Pour finir, ajoutez un titre à la scène (onglet `Scene` de la boîte de dialogue `VCam Graphics Properties`) pour obtenir un graphique aussi proche que possible de celui montré dans le fichier `courbe1.jpg`. Revenez ensuite à `MuPAD`, en sélectionnant l'option `Quitter et revenir à ...` du menu `File` de `VCam` (les `...` étant remplacés par le nom de votre carnet de notes). N'oubliez pas de sauvegarder celui-ci !

Notre but n'est pas encore parfaitement atteint : la symétrie entre les courbes est loin d'être mise en évidence dans ce tracé. Pour cela, il va falloir imposer un intervalle non seulement sur l'axe des x, mais aussi sur celui des y. Le seul moyen qui semble être disponible pour cela (si vous en trouvez un autre, n'hésitez pas à nous en faire part) est la ligne de commande. Tapez donc, dans votre carnet de notes, la commande `plotfunc2d(x, ln(x), exp(x), x=-3..3, y=-3..3)`, et tapez `Entrée`. Passez ensuite sous `VCam` pour modifier la scène de manière à ce qu'elle ressemble le plus possible à celle montrée dans le fichier `courbe2.jpg`. Revenez ensuite à `MuPAD` et sauvegardez votre carnet de notes.

Pour finir, utilisez l'option `Command to Notebook` du menu `Edit` de `VCam` pour faire apparaître dans le carnet de notes la commande correspondant à chacun des deux graphiques obtenus. Comparez ces commandes. Ajoutez dans votre carnet de notes quelques lignes de présentation, expliquant son contenu (à l'aide des options d'insertion de texte du menu `Insert` de `MuPAD`). Sauvegardez enfin votre carnet de notes.

Exercice 2-2 : encadrement et limite d'une suite

On souhaite placer sur un graphique les termes de la suite $\sin n/n$, pour n variant de 0 à 40, ainsi que les deux fonctions encadrant cette suite ($1/x$ et $-1/x$).

Commencez par insérer un texte avant la dernière ligne de commande (qui devrait être vide) de votre carnet de notes. Faites de ce texte le libellé de cet exercice, puis insérez dessous une scène 2D. Comme dans l'exercice 2-1, définissez la suite et les deux fonctions l'encadrant de manière à obtenir un graphique aussi proche que possible de celui montré dans le fichier `suite.jpg`. Le tracé de la suite est obtenu par un style d'objet `Points & Lines` (avec les paramètres par défaut). Faites apparaître dans le carnet de notes la commande correspondant à ce graphique, puis sauvegardez votre carnet de notes.

On aurait pu tracer la suite en utilisant la commande :

```
plot( plot::Pointlist(plot::Point(n, sin(n)/n) $ n=1..40,
                      DrawMode=Connected) );
```

Essayez et comparez : quelle est la principale (et désagréable, dans ce cas) différence ?

Exercice 2-3 : enveloppe d'une famille de droites

Dans cet exercice, on veut représenter deux familles de droites, de manière à faire apparaître leur *enveloppe* (la courbe tangente à chaque droite de cette famille).

Après avoir ajouté le libellé de cet exercice dans votre carnet de notes, définissez le nombre de courbe de la première famille à l'aide de la commande `cardFamille1 := 30;`. Définissez ensuite les courbes de cette famille par la commande :

```
for k from 1 to cardFamille1 do
    u[k]:= 3 - 6 * k / cardFamille1:
    f[k]:= plot::Function2d( u[k] * (2 * x + u[k]),
    x=-10..10, y=-10..10,
    Color=RGB::Blue ):
end_for:
plot(Scaling=Constrained, f[k] $ k=1..cardFamille1);
```

Vous devez obtenir un graphique semblable à celui montré dans le fichier `famille1.jpg`. L'enveloppe dessinée est une parabole. Cette commande définit, pour `k` variant de 1 à ce nombre, un paramètre `u[k]` et l'équation de la droite associée (sous la forme d'une fonction `f[k]`), puis la commande affiche l'ensemble des fonctions. Sauvegardez votre carnet de notes.

Tracez de la même façon entre -1,5 et 1,5 les quarantes droites d'équation $y = g_k(x) = x \cot v_k - \cos v_k$, pour k variant de 1 à 40 avec $v_k = (2k-40)\pi/40+\varepsilon$, ε valant 0,1. Le résultat obtenu doit être semblable à celui montré dans le fichier `famille2.jpg`. L'enveloppe dessinée est une astroïde. Sauvegardez votre carnet de notes.

Exercice 2-4 : décharge d'un condensateur dans un circuit RLC

Nous allons à nouveau nous intéresser à un circuit RLC (comme la semaine dernière), pour étudier la variation de la tension aux bornes du condensateur lorsque la résistance du circuit varie. Cette tension est donnée par la formule suivante :

$$U(t) = U_0 \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) e^{-\lambda t}$$

où $\omega = \sqrt{1/(LC) - \lambda^2}/T$ est la pulsation (en radian par seconde) et $\lambda = R/(2L)$ le coefficient d'amortissement.

On considère le cas où U_0, L et C valent respectivement 10 Ω, 0,5 H et 2 μF, et on souhaite visualiser la variation de la tension entre 0 et 40 ms, lorsque R varie de 100 à 500 Ω. Définissez trois variables `U`, `L` et `C` correspondant respectivement à U_0, L et C. Entrez les formules définissant les variables `‘λ‘` et `‘ω‘` en fonction des trois précédentes. Donnez enfin la formule de `u`, la tension aux bornes du condensateur. Vérifiez qu'on a dans notre cas $\lambda = R$ et $\omega = \sqrt{10^6 - R^2}$, puis masquez ces valeurs et ne gardez que la formule définissant `u` (selon les cas, utilisez des `:` ou des `;` comme séparateurs de commandes). Sauvegardez votre carnet de notes.

Vous pourrez essayez d'afficher la surface définie par `u`, à l'aide de la commande :

```
plot( plot::Function3d(u, t=0..0.04, R=100..500) );
```

Vous constaterez qu'un *bogue* (taille insuffisante de la zone de définition de la fonction `z`) empêche la version Windows de tracer correctement ce graphique (la version Linux n'a pas ce problème). Sauvegardez votre carnet de notes.

Exercice 2-5 : tracé de coniques

On s'intéresse pour finir à l'intersection de deux surfaces de l'espace 3D : un cône et un plan.

Sur un nouveau carnet de notes (problème de mémoire), après le libellé de cet exercice, insérez une scène 3D (option `3D Plot` du menu `Insert`). Pour définir le plan, utilisez le (bouton `New Surface` de l'onglet `Object Definition` dans la boîte de dialogue `VCam Graphics Properties`), et donnez les fonctions définissant sa surface (simplement $z = 1 - x/4$, x appartenant à l'intervalle $[-1{,}1.6]$ et y à $[-1.5{,}1.5]$).

Le cône est quant à lui défini par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{x} & = & \mathrm{u}\cos v \\ \mathrm{y} & = & \mathrm{u}\sin v \\ \mathrm{z} & = & 2 - \mathrm{u} \end{array} \right. , u \in [0{,}2],\ v \in [0{,}2\pi]$$

Pour les tracés, sélectionnez une grille (zone de texte `Grid` de la région `Details` de l'onglet `Object Definition`) de 20 points pour x et u, et de 80 pour y et v. Le résultat obtenu doit être semblable à celui montré dans le fichier `intersect1.jpg`. Sauvegardez votre nouveau carnet de notes.

Tracez ensuite l'intersection de ce cône avec le plan $z = 1 - x$. Le résultat obtenu doit être semblable à celui montré dans le fichier `intersect2.jpg`. Sauvegardez votre carnet de notes.