Décalages et sous-décalages à configurations périodiques denses

Michel Coornaert

IRMA, Université de Strasbourg

Journées SDA2, Nancy

Configurations

On se donne

- un groupe G ,
- un ensemble fini A, que l'on appelle l'alphabet, de cardinal $|A| \geq 2$.

On considère l'ensemble

$$A^G = \prod_{g \in G} A = \{x \colon G \to A\}.$$

Configurations

On se donne

- un groupe G ,
- un ensemble fini A, que l'on appelle l'alphabet, de cardinal $|A| \geq 2$.

On considère l'ensemble

$$A^G = \prod_{g \in G} A = \{x \colon G \to A\}.$$

On munit A de la topologie discrète et A^G de la topologie produit (topologie de la convergence simple).

Configurations

On se donne

- un groupe G ,
- un ensemble fini A, que l'on appelle l'alphabet, de cardinal $|A| \geq 2$.

On considère l'ensemble

$$A^G = \prod_{g \in G} A = \{x \colon G \to A\}.$$

On munit A de la topologie discrète et A^G de la topologie produit (topologie de la convergence simple).
L'espace A^G s'appelle l'espace des configurations. C'est un compact totalement discontinu. Il est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor quand G est infini dénombrable.

Configurations

On se donne

- un groupe G ,
- un ensemble fini A, que l'on appelle l'alphabet, de cardinal $|A| \geq 2$.

On considère l'ensemble

$$A^G = \prod_{g \in G} A = \{x \colon G \to A\}.$$

On munit A de la topologie discrète et A^G de la topologie produit (topologie de la convergence simple).
L'espace A^G s'appelle l'espace des configurations. C'est un compact totalement discontinu. Il est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor quand G est infini dénombrable.
Deux configurations sont « proches »quand elles coïncident sur un « grand »sous-ensemble fini de G. Une base de voisinages de $x \in A^G$ est formée par les

$$V(x, \Omega) := \{y \in A^G : x|_\Omega = y|_\Omega\}$$

où Ω parcourt les sous-ensembles finis de G.

Décalages

Le groupe G agit continûment à gauche sur A^G par le décalage

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

où

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \quad \forall h \in G.$$

Décalages

Le groupe G agit continûment à gauche sur A^G par le décalage

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

où

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \quad \forall h \in G.$$

Une configuration $x \in A^G$ est dite périodique si sa G-orbite $\{gx : g \in G\}$ est finie. Cela revient à dire que son stabilisateur, le sous-groupe

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G : gx = x\} \subset G$$

est d'indice fini dans G.

Densité des configuration périodiques dans $A^{\mathbb{Z}}$

Proposition

Les configurations périodiques sont denses dans $A^{\mathbb{Z}}$.

Démonstration.

Si $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et $I = [i, i + N - 1] \subset \mathbb{Z}$, avec $i \in \mathbb{Z}$ et $N \geq 1$, alors la configuration $y \in A^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$y(k + pN) = x(k)$$

pour tout $k \in I$ et $p \in \mathbb{Z}$, est périodique et coïncide avec x sur l'intervalle I. $\square$

Groupes résiduellement finis

On dit qu'un groupe G est résiduellement fini si, pour tout $g \in G$ tel que $g \neq 1_G$, il existe un groupe fini F et un homomorphisme $u\colon G \to F$ tel que $u(g) \neq 1_F$. Cela revient à dire que 1_G est le seul élément de G qui appartient à tous les sous-groupes d'indice fini de G.

Groupes résiduellement finis

On dit qu'un groupe G est résiduellement fini si, pour tout $g \in G$ tel que $g \neq 1_G$, il existe un groupe fini F et un homomorphisme $u\colon G \to F$ tel que $u(g) \neq 1_F$. Cela revient à dire que 1_G est le seul élément de G qui appartient à tous les sous-groupes d'indice fini de G.

- $\mathbb{Z}$ est résiduellement fini.
- $\mathbb{Z}^d$ est résiduellement fini pour tout entier $d \geq 1$.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas résiduellement fini.
- Tout groupe libre est résiduellement fini.
- Le groupe de Baumslag-Solitar $BS(2,3) := \langle x, y; xy^2 = y^3x \rangle$ n'est pas résiduellement fini.
- Tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini (Mal'cev). On rappelle qu'un groupe G est dit linéaire s'il existe un corps K et un entier $n \geq 1$ tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$.

Caractérisation symbolique des groupes résiduellement finis

Proposition

G résiduellement fini $\iff$ les configurations périodiques sont denses dans A^G.

Proposition

G résiduellement fini $\iff$ les configurations périodiques sont denses dans A^G.

Démonstration.

Si l'ensemble P des configurations périodiques est dense, alors un élément du groupe G qui fixe toute configuration de P doit aussi fixer, par continuité, toute configuration de A^G. Comme l'action de G sur A^G est fidèle, on en déduit que

$$\bigcap_{x \in P} \mathrm{Stab}(x) = \{1_G\}$$

ce qui montre que G est résiduellement fini.

Proposition

G résiduellement fini $\iff$ les configurations périodiques sont denses dans A^G.

Démonstration.

Si l'ensemble P des configurations périodiques est dense, alors un élément du groupe G qui fixe toute configuration de P doit aussi fixer, par continuité, toute configuration de A^G. Comme l'action de G sur A^G est fidèle, on en déduit que

$$\bigcap_{x \in P} \mathrm{Stab}(x) = \{1_G\}$$

ce qui montre que G est résiduellement fini.
Réciproquement, soit $x \in A^G$ et $\Omega \subset G$ un sous-ensemble fini. Si G est résiduellement fini, on peut trouver un sous-groupe distingué $H \lhd G$ d'indice fini tel que l'homomorphisme quotient $u \colon G \to G/H$ soit injectif sur Ω. Soit $\Omega \subset T \subset G$ tel que la restriction de u à T est bijective.

Caractérisation symbolique des groupes résiduellement finis

Proposition

G résiduellement fini $\iff$ *les configurations périodiques sont denses dans A^G.*

Démonstration.

Si l'ensemble P des configurations périodiques est dense, alors un élément du groupe G qui fixe toute configuration de P doit aussi fixer, par continuité, toute configuration de A^G. Comme l'action de G sur A^G est fidèle, on en déduit que

$$\bigcap_{x \in P} \mathrm{Stab}(x) = \{1_G\}$$

ce qui montre que G est résiduellement fini.
Réciproquement, soit $x \in A^G$ et $\Omega \subset G$ un sous-ensemble fini. Si G est résiduellement fini, on peut trouver un sous-groupe distingué $H \triangleleft G$ d'indice fini tel que l'homomorphisme quotient $u \colon G \to G/H$ soit injectif sur Ω. Soit $\Omega \subset T \subset G$ tel que la restriction de u à T est bijective.
Alors la configuration $y \in A^G$ définie par

$$y(ht) = x(t) \quad \forall h \in H, t \in T$$

est périodique (car $y \in \mathrm{Fix}(H)$) et coïncide avec x sur Ω. $\square$

Exercice

Si K est l'intersection de tous les sous-groupes d'indice fini de G, alors K est distingué dans G et le groupe quotient $\widehat{G} := G/K$ est résiduellement fini.

Exercice

Si K est l'intersection de tous les sous-groupes d'indice fini de G, alors K est distingué dans G et le groupe quotient $\widehat{G} := G/K$ est résiduellement fini.
De plus, la fermeture de l'ensemble des configurations périodiques de A^G est l'image de l'injection

$$\rho^* \colon A^{\widehat{G}} \hookrightarrow A^G$$

induite par la surjection canonique $\rho \colon G \to \widehat{G}$.

Sous-décalages de type fini

Un fermé G-invariant $X \subset A^G$ s'appelle un sous-décalage.

Sous-décalages de type fini

Un fermé G-invariant $X \subset A^G$ s'appelle un sous-décalage.

Exemple

Soit $\Omega \subset G$ un sous-ensemble fini et $P \subset A^\Omega$. Alors

$$X = X(\Omega, P) := \{x \in A^G : (gx)|_\Omega \in P \quad \forall g \in G\}$$

est un sous-décalage.

Un fermé G-invariant $X \subset A^G$ s'appelle un sous-décalage.

Exemple

Soit $\Omega \subset G$ un sous-ensemble fini et $P \subset A^\Omega$. Alors

$$X = X(\Omega, P) := \{x \in A^G : (gx)|_\Omega \in P \quad \forall g \in G\}$$

est un sous-décalage.

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est de type fini s'il existe un sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et $P \subset A^\Omega$ tel que $X = X(\Omega, P)$.

Sous-décalages sofiques

Exemple

Si B est un autre alphabet fini, $f\colon B^G \to A^G$ une application continue et G-équivariante (i.e., qui commute avec les deux actions de G), et $Y \subset B^G$ un sous-décalage, alors $X := f(Y) \subset A^G$ est un sous-décalage.

Sous-décalages sofiques

Exemple

Si B est un autre alphabet fini, $f\colon B^G \to A^G$ une application continue et G-équivariante (i.e., qui commute avec les deux actions de G), et $Y \subset B^G$ un sous-décalage, alors $X := f(Y) \subset A^G$ est un sous-décalage.

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est sofique s'il existe un alphabet fini B, une application continue G-équivariante $f\colon B^G \to A^G$ et un sous-décalage de type fini $Y \subset B^G$ tel que $X = f(Y)$.

Sous-décalages sofiques

Exemple

Si B est un autre alphabet fini, $f \colon B^G \to A^G$ une application continue et G-équivariante (i.e., qui commute avec les deux actions de G), et $Y \subset B^G$ un sous-décalage, alors $X := f(Y) \subset A^G$ est un sous-décalage.

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est sofique s'il existe un alphabet fini B, une application continue G-équivariante $f \colon B^G \to A^G$ et un sous-décalage de type fini $Y \subset B^G$ tel que $X = f(Y)$.

Tout décalage de type fini est bien sûr sofique (prendre pour f l'application identique) mais la réciproque est fausse (le sous-décalage pair, c'est-à-dire le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations avec toujours un nombre pair de 1 entre deux 0, est sofique mais pas de type fini).

Remarques

1) Le sous-décalage de Morse $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ne contient pas de configuration périodique.

Remarques

1) Le sous-décalage de Morse $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ne contient pas de configuration périodique.
2) Tout décalage non vide de type fini $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ contient au moins une configuration périodique.

Remarques

1) Le sous-décalage de Morse $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ne contient pas de configuration périodique.
2) Tout décalage non vide de type fini $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ contient au moins une configuration périodique.
3) Il existe des sous-décalages de type fini non vides $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ ne contenant pas de configuration périodique [Ber-1966].

Remarques

1) Le sous-décalage de Morse $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ ne contient pas de configuration périodique.
2) Tout décalage non vide de type fini $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ contient au moins une configuration périodique.

3) Il existe des sous-décalages de type fini non vides $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ ne contenant pas de configuration périodique [Ber-1966].

4) Le sous-décalage de type fini $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ tels que $x(k) = 1 \Rightarrow x(k+1) = 1$ est infini mais ne contient que deux configurations périodiques (les deux configurations constantes). Les configurations périodiques ne sont donc pas denses.

Sous-décalages fortement irréductibles

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est fortement irréductible s'il existe un sous-ensemble fini $\Delta \subset G$ avec la propriété suivante :
si $\Omega_1, \Omega_2 \subset G$ sont des sous-ensemble finis tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2\Delta = \varnothing$ et $x_1, x_2 \in X$, alors il existe $x \in X$ tel que

$$x|_{\Omega_1} = x_1|_{\Omega_1} \quad \text{et} \quad x|_{\Omega_2} = x_2|_{\Omega_2}.$$

Comparaison entre fortement irréductible et topologiquement mélangeant

Rappelons la définition classique suivante :

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est **topologiquement mélangeant** si, pour toute paire d'ouverts non vides $U, V \subset X$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $U \cap gV \neq \varnothing$ est fini. Cela revient à dire que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et toute paire de configurations $x_1, x_2 \in X$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset G$ tel que, pour tout $g \in G \setminus F$, il existe $x \in X$ tel que

$$x|_\Omega = x_1|_\Omega \quad \text{et} \quad x|_{g\Omega} = x_2|_{g\Omega}.$$

Comparaison entre fortement irréductible et topologiquement mélangeant

Rappelons la définition classique suivante :

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est topologiquement mélangeant si, pour toute paire d'ouverts non vides $U, V \subset X$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $U \cap gV \neq \varnothing$ est fini. Cela revient à dire que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et toute paire de configurations $x_1, x_2 \in X$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset G$ tel que, pour tout $g \in G \setminus F$, il existe $x \in X$ tel que

$$x|_\Omega = x_1|_\Omega \quad \text{et} \quad x|_{g\Omega} = x_2|_{g\Omega}.$$

Remarques

1) On a toujours : fortement irréductible $\Rightarrow$ topologiquement mélangeant.

Rappelons la définition classique suivante :

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est topologiquement mélangeant si, pour toute paire d'ouverts non vides $U, V \subset X$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $U \cap gV \neq \varnothing$ est fini. Cela revient à dire que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et toute paire de configurations $x_1, x_2 \in X$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset G$ tel que, pour tout $g \in G \setminus F$, il existe $x \in X$ tel que

$$x|_\Omega = x_1|_\Omega \quad \text{et} \quad x|_{g\Omega} = x_2|_{g\Omega}.$$

Remarques

1) On a toujours : fortement irréductible $\Rightarrow$ topologiquement mélangeant.
2) Le sous-décalage de Ledrappier

$$X := \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \; x(m,n) + x(m+1,n) + x(m,n+1) \text{ est pair } \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

est de type fini, topologiquement mélangeant, mais pas fortement irréductible.

Comparaison entre fortement irréductible et topologiquement mélangeant

Rappelons la définition classique suivante :

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est topologiquement mélangeant si, pour toute paire d'ouverts non vides $U, V \subset X$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $U \cap gV \neq \varnothing$ est fini. Cela revient à dire que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et toute paire de configurations $x_1, x_2 \in X$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset G$ tel que, pour tout $g \in G \setminus F$, il existe $x \in X$ tel que

$$x|_\Omega = x_1|_\Omega \quad \text{et} \quad x|_{g\Omega} = x_2|_{g\Omega}.$$

Remarques

1) On a toujours : fortement irréductible $\Rightarrow$ topologiquement mélangeant.
2) Le sous-décalage de Ledrappier

$$X := \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \ x(m,n)+x(m+1,n)+x(m,n+1) \text{ est pair } \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

est de type fini, topologiquement mélangeant, mais pas fortement irréductible.
3) Un sous-décalage sofique $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est fortement irréductible si et seulement si il est topologiquement mélangeant.

Comparaison entre fortement irréductible et topologiquement mélangeant

Rappelons la définition classique suivante :

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est topologiquement mélangeant si, pour toute paire d'ouverts non vides $U, V \subset X$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $U \cap gV \neq \varnothing$ est fini. Cela revient à dire que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et toute paire de configurations $x_1, x_2 \in X$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset G$ tel que, pour tout $g \in G \setminus F$, il existe $x \in X$ tel que

$$x|_{\Omega} = x_1|_{\Omega} \quad \text{et} \quad x|_{g\Omega} = x_2|_{g\Omega}.$$

Remarques

1) On a toujours : fortement irréductible $\Rightarrow$ topologiquement mélangeant.
2) Le sous-décalage de Ledrappier

$$X := \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \ x(m,n) + x(m+1,n) + x(m,n+1) \text{ est pair } \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

est de type fini, topologiquement mélangeant, mais pas fortement irréductible.
3) Un sous-décalage sofique $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est fortement irréductible si et seulement si il est topologiquement mélangeant.
4) Il existe des sous-décalages $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ fortement irréductibles mais pas topologiquement mélangeants (voir l'exercice 1.42 dans [CC-2010]).

Un théorème de densité

Le résultat suivant est démontré dans [CC-2012].

Théorème 1

Soit G un groupe résiduellement fini. Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage de type fini fortement irréductible contenant (au moins) une configuration périodique. Alors les configurations périodiques sont denses dans X. $\square$

Le résultat suivant est démontré dans [CC-2012].

Théorème 1

Soit G un groupe résiduellement fini. Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage de type fini fortement irréductible contenant (au moins) une configuration périodique. Alors les configurations périodiques sont denses dans X. □

Remarques

1) Ce résultat avait été obtenu précédemment par Lightwood [Lig-2003] dans le cas particulier $G = \mathbb{Z}^d$.

Un théorème de densité

Le résultat suivant est démontré dans [CC-2012].

Théorème 1

Soit G un groupe résiduellement fini. Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage de type fini fortement irréductible contenant (au moins) une configuration périodique. Alors les configurations périodiques sont denses dans X. □

Remarques

1) Ce résultat avait été obtenu précédemment par Lightwood [Lig-2003] dans le cas particulier $G = \mathbb{Z}^d$.
2) Le théorème devient faux si l'on remplace « fortement irréductible »par « topologiquement mélangeant ». En effet, Weiss a donné dans [Wei-2000] un exemple de sous-décalage sur $G = \mathbb{Z}^2$ de type fini et topologiquement mélangeant qui contient une configuration constante mais dans lequel les configurations périodiques ne sont pas denses.

Sous-décalages à propagation bornée

Étant donnés un sous-décalage $X \subset A^G$ et un sous-ensemble fini $\Omega \subset G$, on pose

$$X|_\Omega := \{x|_\Omega : x \in X\}.$$

Sous-décalages à propagation bornée

Étant donnés un sous-décalage $X \subset A^G$ et un sous-ensemble fini $\Omega \subset G$, on pose

$$X|_\Omega := \{x|_\Omega : x \in X\}.$$

La définition suivante a été introduite par M. Gromov [Gro-1999].

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est à propagation bornée s'il existe un sous-ensemble fini $\Delta \subset G$ tel que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et tout $p \in A^\Omega$, on a

$$(\forall g \in G, p|_{\Omega \cap g\Delta} \in X|_{\Omega \cap g\Delta}) \Rightarrow p \in X|_\Omega.$$

Sous-décalages à propagation bornée

Étant donnés un sous-décalage $X \subset A^G$ et un sous-ensemble fini $\Omega \subset G$, on pose

$$X|_\Omega := \{x|_\Omega : x \in X\}.$$

La définition suivante a été introduite par M. Gromov [Gro-1999].

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est à propagation bornée s'il existe un sous-ensemble fini $\Delta \subset G$ tel que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et tout $p \in A^\Omega$, on a

$$(\forall g \in G, p|_{\Omega \cap g\Delta} \in X|_{\Omega \cap g\Delta}) \Rightarrow p \in X|_\Omega.$$

Proposition

Tout sous-décalage à propagation bornée est de type fini et fortement irréductible. □

Étant donnés un sous-décalage $X \subset A^G$ et un sous-ensemble fini $\Omega \subset G$, on pose

$$X|_\Omega := \{x|_\Omega : x \in X\}.$$

La définition suivante a été introduite par M. Gromov [Gro-1999].

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est à propagation bornée s'il existe un sous-ensemble fini $\Delta \subset G$ tel que, pour tout sous-ensemble fini $\Omega \subset G$ et tout $p \in A^\Omega$, on a

$$(\forall g \in G, p|_{\Omega \cap g\Delta} \in X|_{\Omega \cap g\Delta}) \Rightarrow p \in X|_\Omega.$$

Proposition

Tout sous-décalage à propagation bornée est de type fini et fortement irréductible. □

Remarque

Fiorenzi [Fio-2003] a donné un exemple de sous-décalage de type fini fortement irréductible $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ qui n'est pas à propagation bornée.

Sous-décalages d'or généralisés

Rappelons que le sous-décalage d'or est le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que $(x(i), x(i+1)) \neq (1,1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Sous-décalages d'or généralisés

Rappelons que le sous-décalage d'or est le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que $(x(i), x(i+1)) \neq (1,1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Plus généralement, supposons $A = \{0, 1, \ldots, m\}$ et donnons-nous une suite finie $E_1, \ldots, E_k$ de sous-ensembles finis d'un groupe G.

Sous-décalages d'or généralisés

Rappelons que le sous-décalage d'or est le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que $(x(i), x(i+1)) \neq (1,1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
Plus généralement, supposons $A = \{0, 1, \ldots, m\}$ et donnons-nous une suite finie $E_1, \ldots, E_k$ de sous-ensembles finis d'un groupe G.
Considérons le sous-décalage $X \subset A^G$ formé des $x \in A^G$ tels que

$$\forall g \in G, \forall 1 \leq i \leq k, \exists h \in gE_i \text{ tel que } x(h) = 0.$$

Rappelons que le sous-décalage d'or est le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que $(x(i), x(i+1)) \neq (1,1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
Plus généralement, supposons $A = \{0, 1, \ldots, m\}$ et donnons-nous une suite finie $E_1, \ldots, E_k$ de sous-ensembles finis d'un groupe G.
Considérons le sous-décalage $X \subset A^G$ formé des $x \in A^G$ tels que

$$\forall g \in G, \forall 1 \leq i \leq k, \exists h \in gE_i \text{ tel que } x(h) = 0.$$

En prenant $\Delta = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, on voit que X est à propagation bornée. Comme la configuration identiquement nulle est dans X, on déduit du théorème 1 que les configurations périodiques sont denses dans X.

Sous-décalages d'or généralisés

Rappelons que le sous-décalage d'or est le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que $(x(i), x(i+1)) \neq (1,1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
Plus généralement, supposons $A = \{0, 1, \dots, m\}$ et donnons-nous une suite finie $E_1, \dots, E_k$ de sous-ensembles finis d'un groupe G.
Considérons le sous-décalage $X \subset A^G$ formé des $x \in A^G$ tels que

$$\forall g \in G, \forall 1 \leq i \leq k, \exists h \in gE_i \text{ tel que } x(h) = 0.$$

En prenant $\Delta = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, on voit que X est à propagation bornée. Comme la configuration identiquement nulle est dans X, on déduit du théorème 1 que les configurations périodiques sont denses dans X.
Pour $G = \mathbb{Z}$, $m = k = 1$ et $E_1 = \{0,1\}$, on retrouve le sous-décalage d'or classique.

Sous-décalages d'or généralisés

Rappelons que le sous-décalage d'or est le sous-décalage $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des configurations $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que $(x(i), x(i+1)) \neq (1,1)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
Plus généralement, supposons $A = \{0, 1, \dots, m\}$ et donnons-nous une suite finie $E_1, \dots, E_k$ de sous-ensembles finis d'un groupe G.
Considérons le sous-décalage $X \subset A^G$ formé des $x \in A^G$ tels que

$$\forall g \in G, \forall 1 \leq i \leq k, \exists h \in gE_i \text{ tel que } x(h) = 0.$$

En prenant $\Delta = E_1 \cup \cdots \cup E_k$, on voit que X est à propagation bornée. Comme la configuration identiquement nulle est dans X, on déduit du théorème 1 que les configurations périodiques sont denses dans X.
Pour $G = \mathbb{Z}$, $m = k = 1$ et $E_1 = \{0,1\}$, on retrouve le sous-décalage d'or classique.
Pour $G = \mathbb{Z}^2$, $m = 1$, $k = 2$, $E_1 = \{(0,0),(1,0)\}$ et $E_2 = \{(0,0),(0,1)\}$, le sous-décalage X est le modèle de la sphère dure.

Les W-sous-décalages

On note $A^\star$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et $|w|$ la longueur d'un mot $w \in A^\star$.

Les W-sous-décalages

On note $A^\star$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et $|w|$ la longueur d'un mot $w \in A^\star$. Pour $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, on note $L(X) \subset A^\star$ le langage formé de tous les mots qui apparaissent dans les configurations de X. autrement dit,

$$L(X) := \{w \in A^\star : \exists x \in X, \exists i \in \mathbb{Z}, \exists n \geq 0 \text{ tel que } w = x(i)x(i+1)\dots x(i+n-1)\}.$$

Les W-sous-décalages

On note $A^\star$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et $|w|$ la longueur d'un mot $w \in A^\star$. Pour $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, on note $L(X) \subset A^\star$ le langage formé de tous les mots qui apparaissent dans les configurations de X. autrement dit,

$$L(X) := \{w \in A^\star : \exists x \in X, \exists i \in \mathbb{Z}, \exists n \geq 0 \text{ tel que } w = x(i)x(i+1)\dots x(i+n-1)\}.$$

Un décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est dit irréductible si
$\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists w \in L(X)$ tel que $uwv \in L(X)$.

Les W-sous-décalages

On note $A^\star$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et $|w|$ la longueur d'un mot $w \in A^\star$. Pour $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, on note $L(X) \subset A^\star$ le langage formé de tous les mots qui apparaissent dans les configurations de X. autrement dit,

$$L(X) := \{w \in A^\star : \exists x \in X, \exists i \in \mathbb{Z}, \exists n \geq 0 \text{ tel que } w = x(i)x(i+1)\dots x(i+n-1)\}.$$

Un décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est dit irréductible si
$\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists w \in L(X)$ tel que $uwv \in L(X)$.

Définition

on dit qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un W-sous-décalage s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que

$$\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists c \in L(X) \text{ tel que } |c| \leq n_0 \text{ et } ucv \in L(X).$$

Les W-sous-décalages

On note $A^\star$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et $|w|$ la longueur d'un mot $w \in A^\star$. Pour $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, on note $L(X) \subset A^\star$ le langage formé de tous les mots qui apparaissent dans les configurations de X. autrement dit,

$$L(X) := \{w \in A^\star : \exists x \in X, \exists i \in \mathbb{Z}, \exists n \geq 0 \text{ tel que } w = x(i)x(i+1)\dots x(i+n-1)\}.$$

Un décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est dit irréductible si
$\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists w \in L(X)$ tel que $uwv \in L(X)$.

Définition

on dit qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un W-sous-décalage s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que

$$\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists c \in L(X) \text{ tel que } |c| \leq n_0 \text{ et } ucv \in L(X).$$

Proposition

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-décalage fortement irréductible ou sofique irréductible, alors X est un W-sous-décalage.

Les W-sous-décalages

On note $A^\star$ l'ensemble des mots sur l'alphabet A et $|w|$ la longueur d'un mot $w \in A^\star$. Pour $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, on note $L(X) \subset A^\star$ le langage formé de tous les mots qui apparaissent dans les configurations de X. autrement dit,

$$L(X) := \{w \in A^\star : \exists x \in X, \exists i \in \mathbb{Z}, \exists n \geq 0 \text{ tel que } w = x(i)x(i+1)\dots x(i+n-1)\}.$$

Un décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est dit irréductible si $\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists w \in L(X)$ tel que $uwv \in L(X)$.

Définition

on dit qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un W-sous-décalage s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que

$$\forall u \in L(X), \forall v \in L(X), \exists c \in L(X) \text{ tel que } |c| \leq n_0 \text{ et } ucv \in L(X).$$

Proposition

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-décalage fortement irréductible ou sofique irréductible, alors X est un W-sous-décalage.

Remarque

Il existe des W-sous-décalages $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ qui ne sont ni fortement irréductibles ni sofiques irréductibles.

La preuve du résultat suivant (voir [CC-2012]) nous a été communiquée par Benjy Weiss.

Théorème 2

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un W-sous-décalage, alors les configurations périodiques sont denses dans X. □

La preuve du résultat suivant (voir [CC-2012]) nous a été communiquée par Benjy Weiss.

Théorème 2

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un W-sous-décalage, alors les configurations périodiques sont denses dans X. □

Corollaire

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-décalage fortement irréductible ou sofique irréductible, alors les configurations périodiques sont denses dans X. □

La preuve du résultat suivant (voir [CC-2012]) nous a été communiquée par Benjy Weiss.

Théorème 2

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un W-sous-décalage, alors les configurations périodiques sont denses dans X. $\square$

Corollaire

Si $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-décalage fortement irréductible ou sofique irréductible, alors les configurations périodiques sont denses dans X. $\square$

Remarque

La densité des configurations périodiques dans les sous-décalages sofiques irréductibles est aussi démontrée dans [Fio-2009].

Lightwood [Lig-2003] a démontré que tout sous-décalage fortement irréductible et de type fini sur $\mathbb{Z}^2$ contient un ensemble dense de configurations périodiques.

Question ouverte

Lightwood [Lig-2003] a démontré que tout sous-décalage fortement irréductible et de type fini sur $\mathbb{Z}^2$ contient un ensemble dense de configurations périodiques.
Il semble que la question suivante soit ouverte :

Question

Est-ce que tout sous-décalage de type fini fortement irréductible sur $\mathbb{Z}^3$ contient un ensemble dense de configurations périodiques ?

D'après le théorème 1, il suffit de montrer qu'un tel sous-décalage contient une configuration périodique s'il est non vide.

Question ouverte

Lightwood [Lig-2003] a démontré que tout sous-décalage fortement irréductible et de type fini sur $\mathbb{Z}^2$ contient un ensemble dense de configurations périodiques.
Il semble que la question suivante soit ouverte :

Question

Est-ce que tout sous-décalage de type fini fortement irréductible sur $\mathbb{Z}^3$ contient un ensemble dense de configurations périodiques ?

D'après le théorème 1, il suffit de montrer qu'un tel sous-décalage contient une configuration périodique s'il est non vide.
On peut remplacer $\mathbb{Z}^3$ par $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, ou par G résiduellement fini.

Bibliographie

[Ber-1966] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 66, 196.

[CC-2010] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2010.

[CC-2012] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *On the density of periodic configurations in strongly irreducible subshifts*, Nonlinearity **25** (2012), no. 7, 2119–2131.

[Fio-2003] F. Fiorenzi, *Cellular automata and strongly irreducible shifts of finite type*, Theoret. Comput. Sci. **299** (2003), 477–493.

[Fio-2009] F. Fiorenzi, *Periodic configurations of subshifts on groups*, Internat. J. Algebra Comput. **19** (2009), 315–335.

[Gro-1999] M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), 109–197.

[Lig-2003] S. J. Lightwood, *Morphisms from non-periodic $\mathbb{Z}^2$-subshifts. I. Constructing embeddings from homomorphisms*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **23** (2003), 587–609.

[Wei-2000] B. Weiss, *Sofic groups and dynamical systems*, (Ergodic theory and harmonic analysis, Mumbai, 1999) Sankhya Ser. A. **62** (2000), 350–359.