Pavages et logique

E. Jeandel

Marseille, France, Monde

2 avril 2008

But

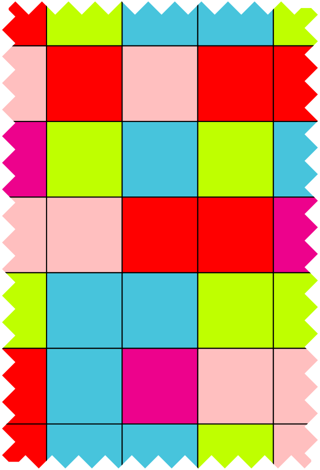
Expliquer comment voir les pavages comme des modèles d'une théorie, et ce que ça apporte

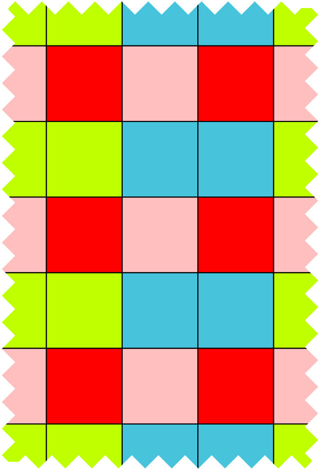
Plan

1. Coloriages comme structures

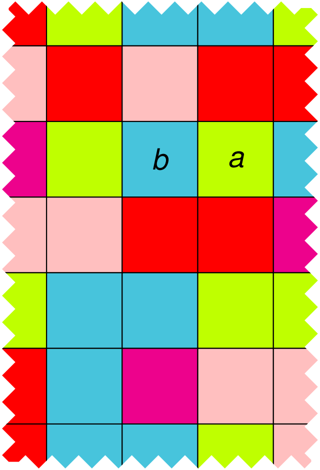
2. Pavages comme théories
   - Formaliser le plan
   - Formaliser les tuiles
   - Formaliser les contraintes

$\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$

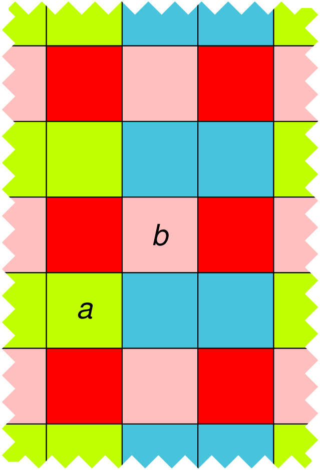




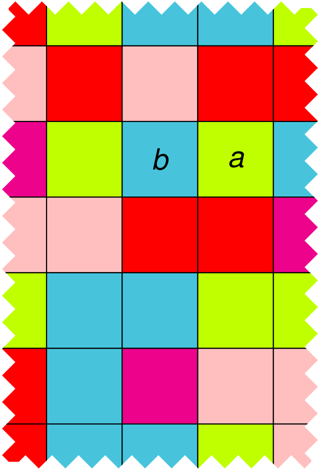
$\mathfrak{M}$



$\mathfrak{N}$

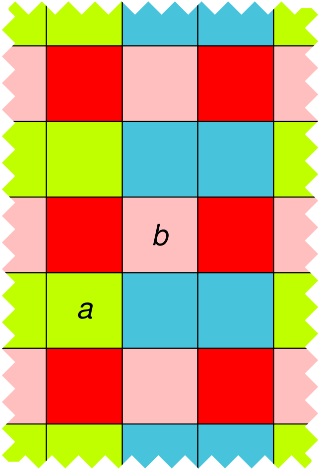


$\mathfrak{M}$



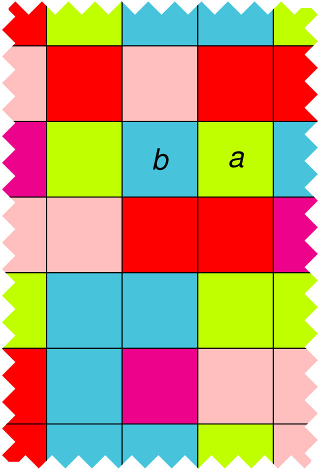
$\mathfrak{M} \models P_{\square}(a)$

$\mathfrak{N}$



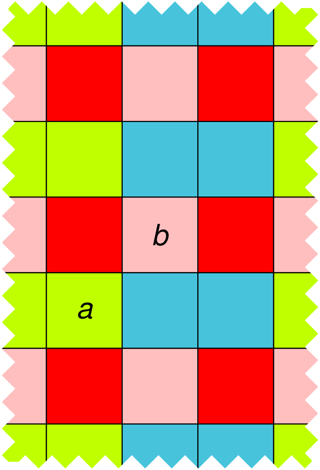
$\mathfrak{N} \models P_{\square}(a)$

$\mathfrak{M}$



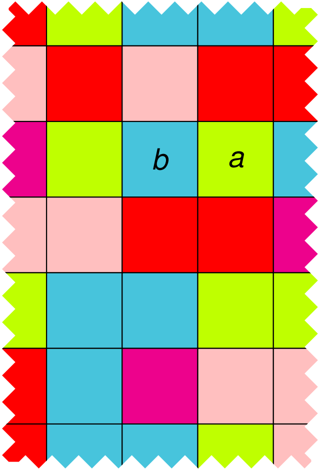
$\mathfrak{M} \models P_{\square}(b)$

$\mathfrak{N}$



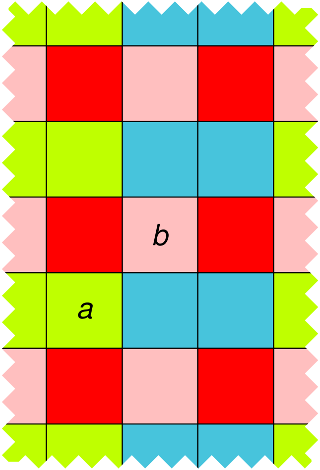
$\mathfrak{N} \not\models P_{\square}(b)$

$$\mathfrak{M}$$



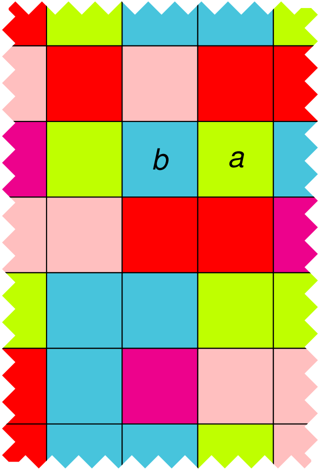
$$\mathfrak{M} \models \exists x, P_{\blacksquare}(x)$$

$$\mathfrak{N}$$

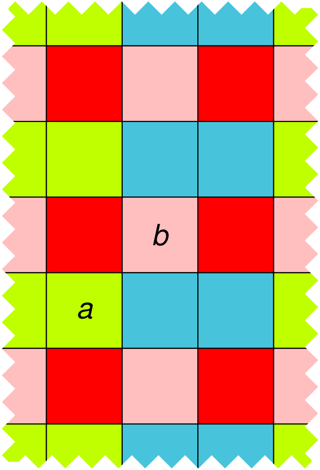


$$\mathfrak{N} \models \exists x, P_{\blacksquare}(x)$$

$\mathfrak{M}$



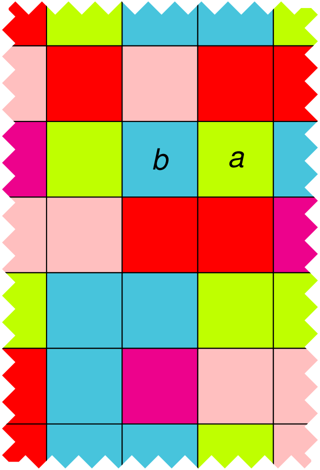
$\mathfrak{N}$



$\mathfrak{M} \not\models \forall x, \neg P_{\blacksquare}(x)$

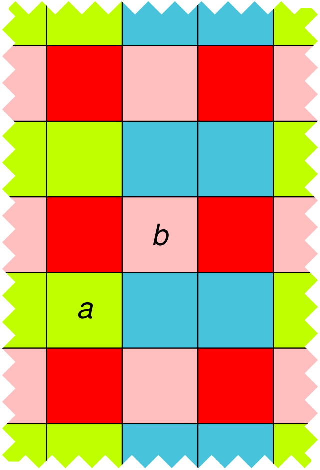
$\mathfrak{N} \models \forall x, \neg P_{\blacksquare}(x)$

$\mathfrak{M}$



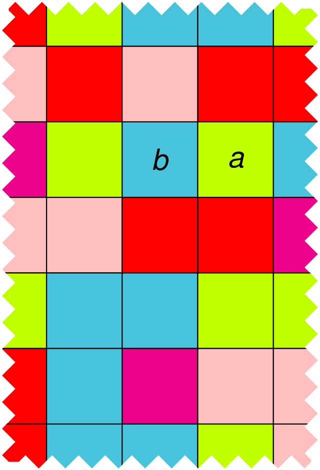
$\mathfrak{M} \models (b = W(a))$

$\mathfrak{N}$

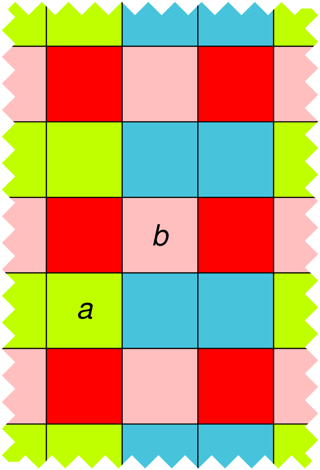


$\mathfrak{N} \models (b = N(E(a)))$

$\mathfrak{M}$



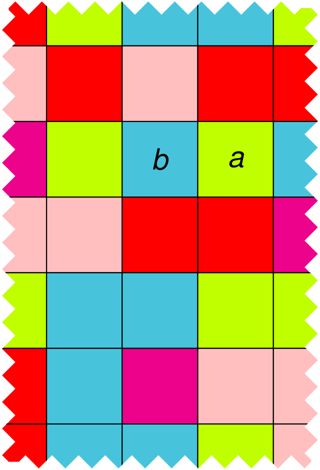
$\mathfrak{N}$



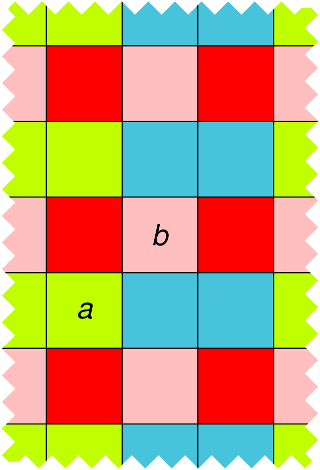
$$\mathfrak{M} \models \forall x, \exists y, N(x) = y$$

$$\mathfrak{N} \models \forall x, \exists y, N(x) = y$$

$\mathfrak{M}$



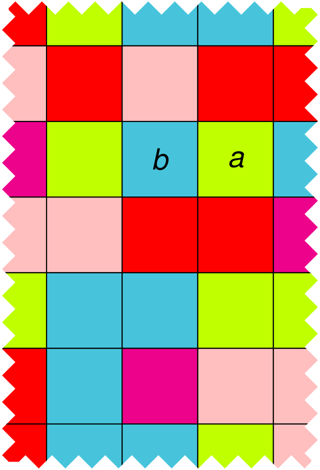
$\mathfrak{N}$



$$\mathfrak{M} \models \forall x, N(S(x)) = x$$

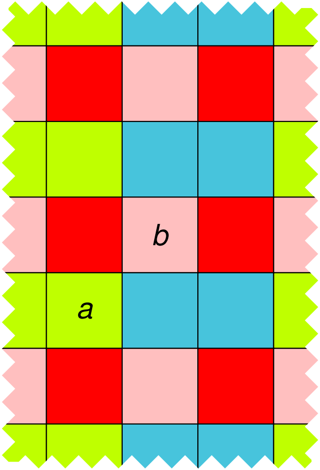
$$\mathfrak{N} \models \forall x, N(S(x)) = x$$

$\mathfrak{M}$



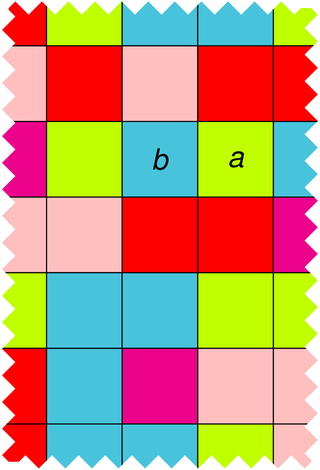
$\mathfrak{M} \not\models \forall x, \neg(P_{\square}(x) \land P_{\square}(N(x)))$

$\mathfrak{N}$

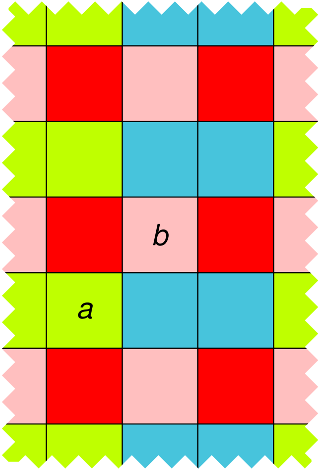


$\mathfrak{N} \models \forall x, \neg(P_{\square}(x) \land P_{\square}(N(x)))$

$\mathfrak{M}$



$\mathfrak{N}$



$$\mathfrak{M} \not\models P_{\square}(x) \implies P_{\square}(N(N(x)))$$

$$\mathfrak{N} \models \forall x, P_{\square}(x) \implies P_{\square}(N(N(x)))$$

Formalisation

Définition (Language)

On se place dans le language $\mathcal{L}$ constitué

- *De prédicats unaires P_i pour $i \in C$.*
- *De 4 fonctions unaires : N, S, E, W.*

Définition (Structure)

Un coloriage $M \in C^{\mathbb{Z}^2}$ est vu comme une structure $\mathfrak{M}$ de la façon suivante :

- *Les points sont les éléments de $\mathbb{Z}^2$*
- *$P_i((x,y))$ est vraie ssi $M(x,y) = i$.*
- *$N : (x,y) \mapsto (x, y+1), \ldots$*

Isomorphisme

Théorème

Deux coloriages M et N sont égaux à translation près si et seulement si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont isomorphes en tant que structures sur $\mathcal{L}$.

Démonstration.

Facile. $\square$

Equivalence élémentaire

Question

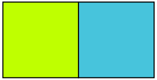
Caractériser quand deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont la même théorie (satisfont les mêmes formules).

Motifs

Fait

Si P est un motif,on peut écrire une formule ϕ_P tel que $\mathfrak{M} \models \phi_P$ si et seulement si M contient le motif P.

Exemple :



$$\phi_P := \exists x, P_{\square}(x) \wedge P_{\square}(E(x))$$

Isomorphisme local

Définition

Deux coloriages M et N sont localement isomorphes si ils ont les mêmes motifs.

Proposition

Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont même théorie, alors M et N sont localement isomorphes.

Réciproque ?

Théorème

Si deux coloriages M et N sont localement isomorphes, alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont même théorie.

La logique du premier ordre a un caractère local

Démonstration.

Application classique du théorème de Gaifman ou du lemme de Hanf. $\square$

Preuve (part 1)

Proposition

Soit P un motif qui apparaît une seule fois dans M.
Alors si M et N sont localement isomorphes, M et N sont égaux à translation près.

Démonstration.

On peut supposer que P apparaît centré en 0 dans M et dans N et qu'il est de taille m.
Soit $n \geq m$. Le carré $n \times n$ centré en 0 dans M et dans N est le seul carré $n \times n$ qui contient P en son centre.
Donc $M[-n, n] = N[-n, n]$. □

Preuve (part 1)

Proposition

Soit P un motif qui apparaît une seule fois dans M.
Alors si M et N sont localement isomorphes, M et N sont égaux à translation près.

Corollaire

Soit P un motif qui apparaît un nombre fini de fois dans M. Alors si M et N sont localement isomorphes, M et N sont égaux à translation près.

Preuve (part 2)

On suppose maintenant que tout motif qui apparaît dans M apparaît infiniment souvent.
On considère pour simplifier que E, N, S, W sont maintenant des prédicats binaires et non pas des fonctions unaires

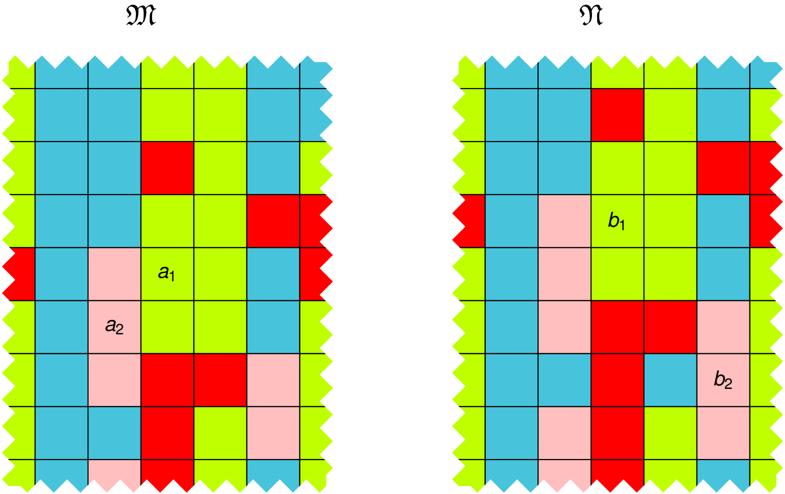
$$E(x, y) \text{ est vrai si } x \text{ est à l'est de } y.$$

Définition

Soit $a_1 \dots a_p$ des points de $\mathfrak{M}$ et $b_1 \dots b_p$ des points de $\mathfrak{M}$.
On dit que $a_1 \dots a_p$ et $b_1 \dots b_p$ sont n-isomorphes si pour chaque i l'ensemble des points à distance inférieur à 3^{n-1} de a_i est isomorphe à l'ensemble des points à distance inférieur à 3^{n-1} des b_i.

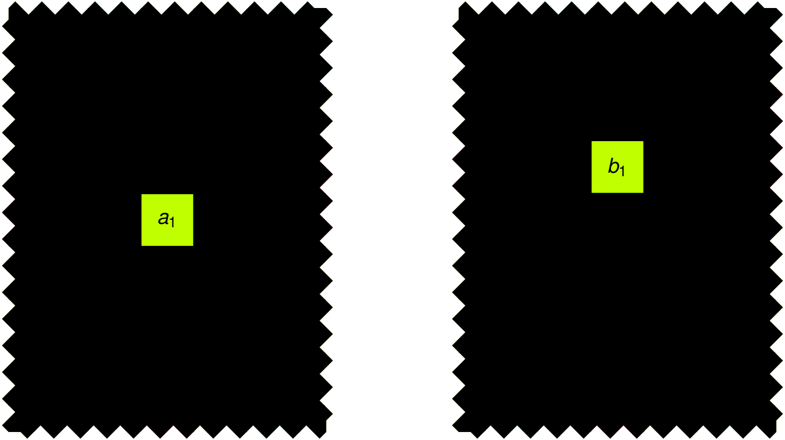
Note : l'isomorphisme doit envoyer les a_i sur les b_i.

n-isomorphes



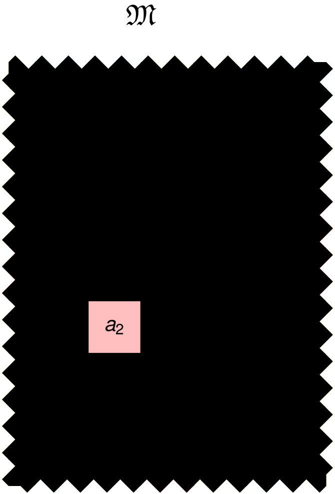
(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont-ils 0-isomorphes ?

$\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$



(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont-ils 0-isomorphes ?

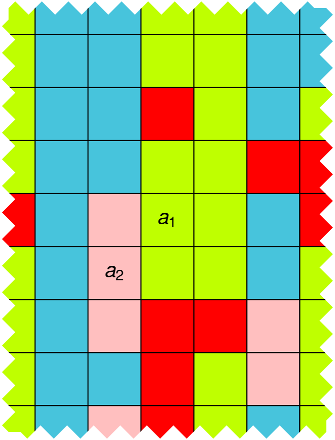
n-isomorphes



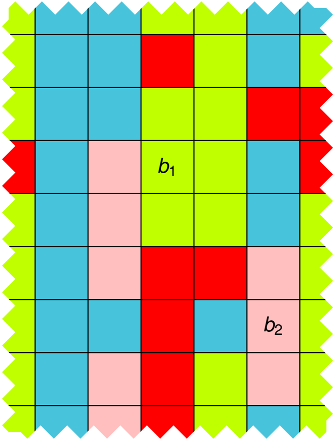
(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont donc 0-isomorphes.

n-isomorphes

$\mathfrak{M}$



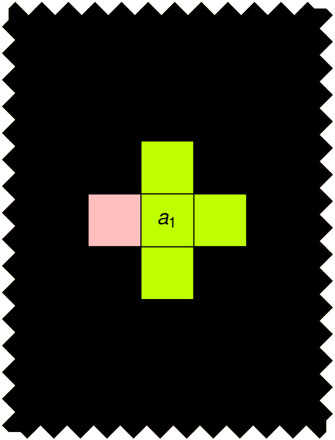
$\mathfrak{N}$

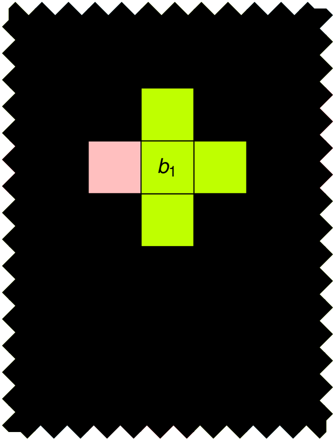


(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont-ils 1-isomorphes ?

n-isomorphes

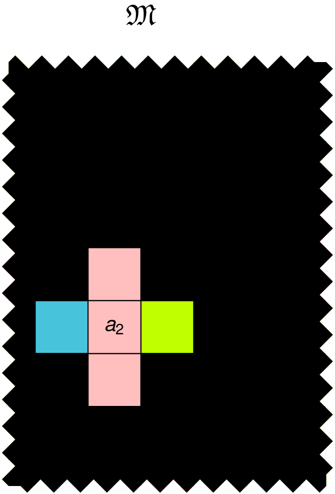
$\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$





(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont-ils 1-isomorphes ?

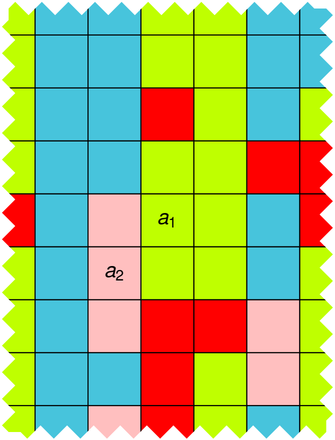
n-isomorphes



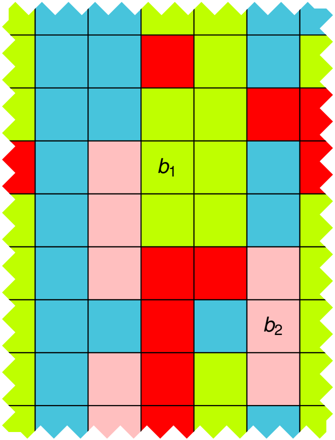
(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont donc 1-isomorphes.

n-isomorphes

$\mathfrak{M}$



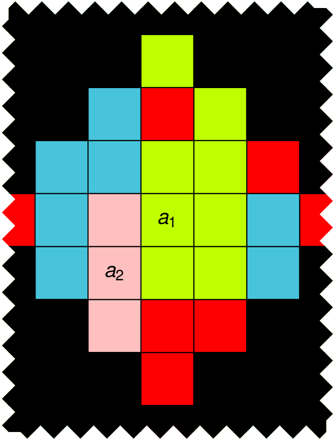
$\mathfrak{N}$



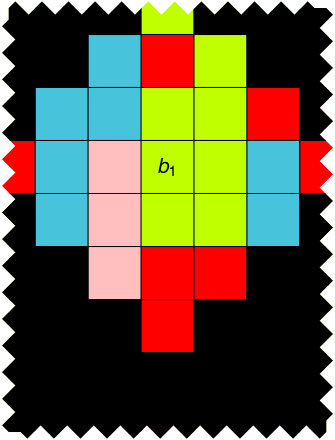
(a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont-ils 2-isomorphes ?

n-isomorphes

$\mathfrak{M}$



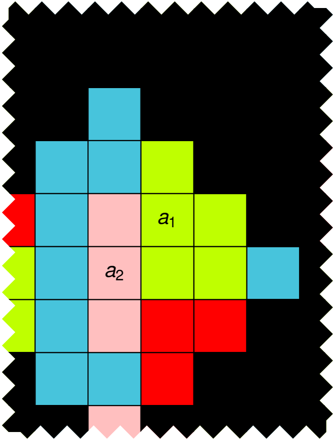
$\mathfrak{N}$



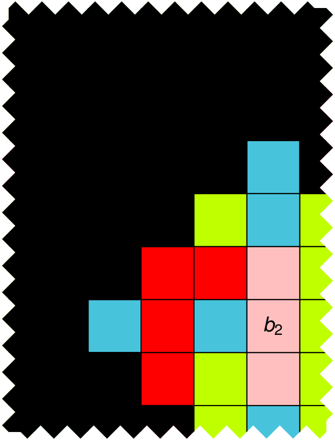
(a_1, a_2) et (b_1, b_2) ne sont pas 2-isomorphes.

n-isomorphes

$\mathfrak{M}$



$\mathfrak{N}$



(a_1, a_2) et (b_1, b_2) ne sont pas 2-isomorphes.

Preuve (part 2, cont'd)

Soit M et N localement isomorphes et où tout motif présent apparait infiniment souvent.
Soit $a_1 \dots a_p$ et $b_1 \dots b_p$ qui sont $(n+1)$-isomorphes.

Proposition

Quelque soit a dans M, on peut trouver b de N tel que $a_1 \dots a_p, a$ *et* $b_1 \dots b_p, b$ *sont n-isomorphes.*
Quelque soit b dans N, on peut trouver a de M tel que $a_1 \dots a_p, a$ *et* $b_1 \dots b_p, b$ *sont n-isomorphes.*

Preuve (part 2, cont'd)

Deux cas :

- Si a est à distance moins de 3^{n-1} de a_1. Prendre b au même endroit près de b_1.
- Sinon, a est suffisament loin de chacun des a_i. Considérons le motif de taille 3^{n-1} centré autour de a. Ce motif apparaît infiniment souvent dans M, donc dans N. On peut prendre b centré sur ce motif, suffisament loin de chacun des b_i.

Preuve (part 2, cont'd)

Théorème

Si a_i et b_i sont n-isomorphes, alors ils vérifient les mêmes formules de rang de quantification au plus n.

Démonstration.

Par récurrence sur n.

- Supposons $\mathfrak{M} \models \forall x, \phi(a_1 \dots a_p, x)$
- Soit b dans $\mathfrak{N}$. Prenons le a correspondant.
- $\mathfrak{M} \models \phi(a_1 \dots a_p, a)$
- Donc $\mathfrak{N} \models \phi(b_1 \dots b_p, b)$ par hypothèse de récurrence.
- Donc $\mathfrak{N} \models \forall x, \phi(b_1 \dots b_p, x)$

$\square$

Conclusion

Comme $\emptyset$ et $\emptyset$ sont n-isomorphes pour tout n, on en déduit :

Théorème

Si M et N sont localement isomorphes, alors $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ satisfont les mêmes formules.

Plan

1. Coloriages comme structures

2. Pavages comme théories
   - Formaliser le plan
   - Formaliser les tuiles
   - Formaliser les contraintes

But

Décrire, pour chaque jeu de tuiles τ, une théorie T_τ telles que les structures qui satisfont T_τ correspondent aux pavages utilisant τ.

- Formaliser le plan $\mathbb{Z}^2$
- Formaliser les tuiles
- Formaliser les règles de pavages

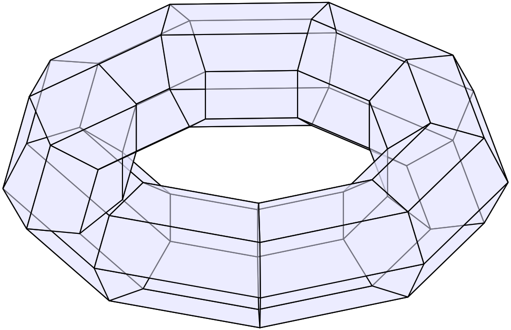
Formaliser le plan

$$\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | ab = ba \rangle$$

$$\forall x, N(S(x)) = x$$
$$\forall x, S(N(x)) = x$$
$$\forall x, E(W(x)) = x$$
$$\forall x, W(E(x)) = x$$
$$\forall x, N(E(x)) = E(N(x))$$

Formaliser le plan

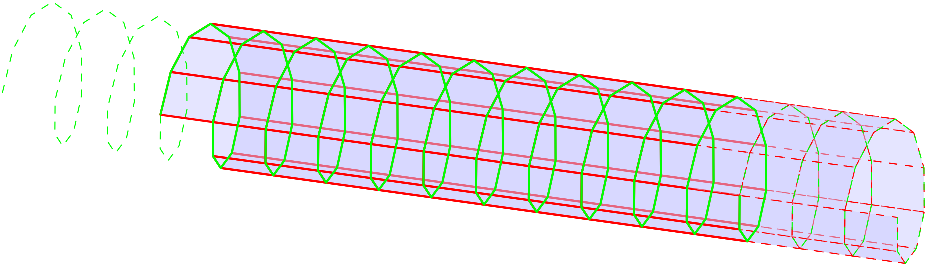
Ces axiomes ne suffisent pas :



$$\forall x, N^7(x) = x$$
$$\forall x, E^9(x) = x$$

Formaliser le plan

Ces axiomes ne suffisent pas :



$$\forall x, N^{10}(x) = E(x)$$

Formaliser le plan

On ajoute donc les axiomes

$$\forall x, N^i E^j(x) \neq x$$

pour tous i et j dans $\mathbb{Z}$.

Note (anticipative)

Si notre jeu de tuiles ne produit pas de pavage périodique, aucun plan dégénéré ne peut être le support d'un modèle de la théorie.

i.e.

Si le jeu de tuiles ne produit pas de pavage périodique, ces axiomes sont inutiles.

Formaliser le plan (fin)

Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux structures vérifiant les axiomes, alors $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ aussi.

On ne peut pas forcer (au premier ordre) les structures à être connexes.

Nos structures ne seront donc pas des pavages, mais des unions de pavages.

Démonstration

Prenons une théorie quelconque T sur un langage $\mathcal{L}$ (contenant E, N, S, W) qui axiomatise les pavages, et ajoutons deux constantes c et d.

Considérons la théorie

$$T' = T \cup \{\phi_n(c, d), n \in \mathbb{N}\}$$

où $\phi_n(x, y)$ est une formule signifiant que x est à distance au moins n de y.

- Toute partie finie de T' a un modèle, il suffit de prendre c et d suffisament loin
- Donc par compacité, T' a un modèle, qui ne peut être connexe.

Formaliser les tuiles

Chaque point a une couleur :

$$\forall x, P_{\color{lime}\blacksquare}(x) \vee P_{\color{cyan}\blacksquare}(x) \vee \dots$$

Chaque point n'a qu'une couleur à la fois

$$\forall x, \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x) \wedge P_{\color{cyan}\blacksquare}(x)) \wedge \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x) \wedge P_{\color{red}\blacksquare}(x)) \wedge \dots$$

Contraintes de pavage

Le motif n'apparaît pas :

$$\forall x, \neg(P_{\color{red}\blacksquare}(x) \wedge P_{\color{red}\blacksquare}(N(x)))$$

$$\forall x, \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x) \wedge P_{\color{cyan}\blacksquare}(E(x)))$$

Correspondance

Théorème

On peut associer à τ une théorie T_τ telle que

- *Tout pavage peut être vu comme un modèle de T_τ*
- *Tout modèle de T_τ peut être vu comme une union de pavages.*

Corollaire

τ pave le plan si et seulement T_τ a un modèle.

Corollaire

T_τ est complète si et seulement si tous les pavages par τ sont localement isomorphes.

Une théorie finiment axiomatisable et superstable

Si on part d'un jeu de tuiles qui ne pave le plan que d'une seule manière à isomorphisme local près, non périodique (ce que Nicolas à fait hier)

- La théorie T_τ est complète.
- La théorie T_τ a un nombre fini d'axiomes (pas besoin d'éliminer les tores, qui ne peuvent apparaître).
- Le nombre de structures connexes (pavages) est non dénombrable.

Premier exemple en théorie des modèles d'une théorie complète finiment axiomatisable et superstable.

Correspondance

$T'_\tau = T_\tau$ sans les formules excluant les tores.

Corollaire

- *T'_τ a un modèle si et seulement si τ pave le plan.*
- *T'_τ a un modèle fini si et seulement si τ pave le plan périodiquement.*

Réduction conservative

Pour toute formule ϕ du premier ordre, on peut fabriquer une machine de Turing M tel que

- M s'arrête en répondant oui si ϕ a un modèle fini
- M s'arrête en répondant non si ϕ n'a pas de modèle
- M ne s'arrête pas si ϕ a un modèle mais pas de modèle fini.

Réduction conservative

On peut transformer la machine de Turing en un jeu de tuiles τ tel que

- τ pave périodiquement si M s'arrête en répondant oui
- τ ne pave pas si M s'arrête en répondant non
- τ pave mais de façon non périodique si M ne s'arrête pas

Réduction conservative

On peut transformer τ en une formule ψ (la conjonction de toutes les formules dans T'_τ) telle que

- ψ a un modèle fini si τ pave périodiquement
- ψ n'a pas de modèle si τ ne pave pas
- ψ a un modèle mais pas de modèle fini si τ pave mais de façon non périodique

Réduction conservative

On peut transformer (récursivement) ϕ en une formule ψ telle que

- ψ a un modèle fini ssi ϕ a un modèle fini
- ψ a un modèle ssi ϕ a un modèle

De plus,

- ψ n'utilise que quatre fonctions unaires et des prédicats unaires.
- ψ est une formule de la forme $\forall x, \theta(x)$ où θ est sans quantificateurs.

Quatre fonctions unaires N, S, E, W, quelques prédicats unaires P_i

$$\forall x, N(S(x)) = x$$
$$\forall x, S(N(x)) = x$$
$$\forall x, E(W(x)) = x$$
$$\forall x, W(E(x)) = x$$
$$\forall x, N(E(x)) = E(N(x))$$

$$\forall x, P_{\square}(x) \vee P_{\square}(x) \vee \dots$$
$$\forall x, \neg(P_{\square}(x) \wedge P_{\square}(x)) \wedge \neg(P_{\square}(x) \wedge P_{\square}(x)) \wedge \dots$$

$$\forall x, \neg(P_{\square}(x) \wedge P_{\square}(N(x)))$$
$$\forall x, \neg(P_{\square}(x) \wedge P_{\square}(E(x)))$$

Une fonction unaire S, quelques prédicats binaires P_i

$$\forall x \exists x', S(x') = x$$

$$\forall x, y, P_{\color{lime}\blacksquare}(x, y) \vee P_{\color{cyan}\blacksquare}(x, y) \vee \dots$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\color{cyan}\blacksquare}(x, y)) \wedge \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\color{red}\blacksquare}(x, y)) \wedge \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\color{red}\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\color{red}\blacksquare}(x, S(y)))$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\color{cyan}\blacksquare}(S(x), y))$$

Une fonction unaire S, quelques prédicats binaires P_i

$$\forall x, y, P_{\square}(x,y) \vee P_{\square}(x,y) \vee \dots$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\square}(x,y) \wedge P_{\square}(x,y)) \wedge \neg(P_{\square}(x,y) \wedge P_{\square}(x,y)) \wedge \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\square}(x,y) \wedge P_{\square}(x,S(y)))$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\square}(x,y) \wedge P_{\square}(S(x),y))$$

Une fonction unaire S, quelques prédicats binaires P_i

$$\forall x, y, P_{\color{lime}\blacksquare}(x,y) \vee P_{\color{cyan}\blacksquare}(x,y) \vee \dots$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x,y) \wedge P_{\color{cyan}\blacksquare}(x,y)) \wedge \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x,y) \wedge P_{\color{red}\blacksquare}(x,y)) \wedge \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\color{red}\blacksquare}(y,x) \wedge P_{\color{red}\blacksquare}(y,S(x)))$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\color{lime}\blacksquare}(x,y) \wedge P_{\color{cyan}\blacksquare}(S(x),y))$$

Une fonction unaire S, quelques prédicats binaires P_i

$$\forall x, y, \Phi(x, y, S(x))$$

Quelques prédicats binaires P_i

$$\forall x \exists x' \forall y, \Phi(x, y, x')$$

AEA

On peut transformer (récursivement) ϕ en une formule ψ telle que

- ψ a un modèle fini ssi ϕ a un modèle fini
- ψ a un modèle ssi ϕ a un modèle

De plus,

- ψ n'utilise qu'un nombre fini de prédicats binaires.
- ψ est une formule de la forme $\forall x \exists x' \forall y, \theta(x, x', y)$ où θ est sans quantificateurs.

On dit que $(\forall\exists\forall, (0, \omega))$ est une classe de réduction conservative.

Wang (Historique)

Est-ce qu'on peut décider si une formule $\forall\exists\forall(0,\omega)$ est satisfaisable ?

- Toute formule $\forall\exists\forall(0,\omega)$ peut se transformer en un jeu de tuiles (non prouvé ici)
- Savoir si un jeu de tuiles pave le plan est-il décidable ?
- Si oui, on peut décider.

Wang (Historique)

Savoir si un jeu de tuiles pave le plan n'est pas décidable

- En fait, on peut transformer toute formule en un jeu de tuiles comme ci-dessus
- Savoir si une formule $\forall\exists\forall$ est satisfaisable est donc indécidable

C'est la fin

Après les slides en beamer, on passe au beaver.