Aspects structurels des pavages

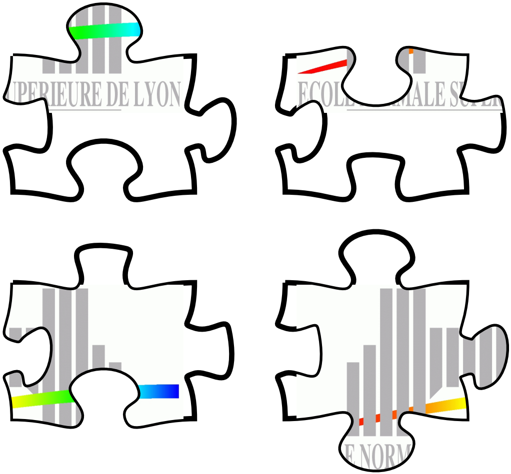
E. Jeandel

Marseille, France, Monde

Puzzle

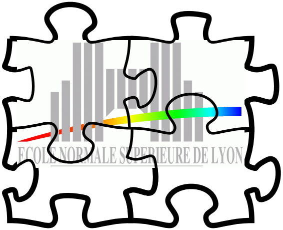
Mais qu'est ce que c'est que cette image ?

Etant donné des pièces de puzzle en quantité infinie, peut-on faire un puzzle infini dans toutes les directions ?



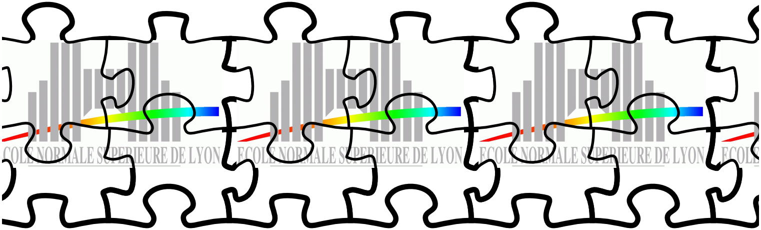
Réponse

Ce puzzle n'était pas très dur



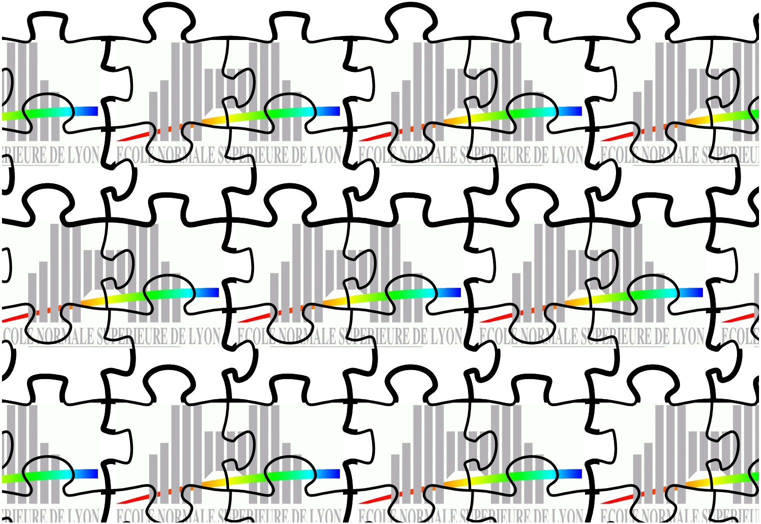
Réponse

Ce puzzle n’était pas très dur



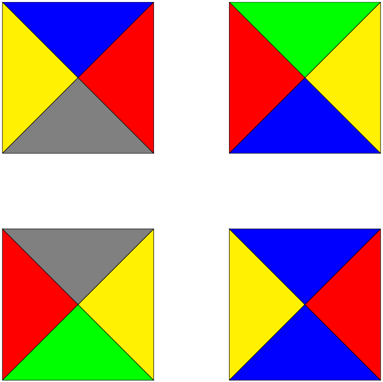
Réponse

Ce puzzle n'était pas très dur



Formalisation : Tuiles de Wang

Tout cela devient plus carré

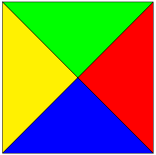


Un jeu de tuiles de Wang est donc donné par un ensemble de couleurs, et, pour chaque tuile, par un quadruplet de couleur.

Rotation des tuiles de Wang

C'est mal

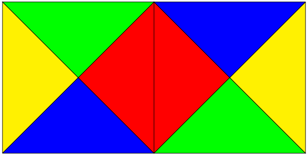
Contrairement aux pièces de puzzle, on interdit les rotations des tuiles de Wang.



Rotation des tuiles de Wang

C'est mal

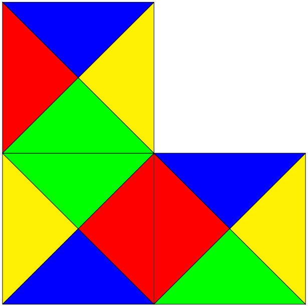
Contrairement aux pièces de puzzle, on interdit les rotations des tuiles de Wang.



Rotation des tuiles de Wang

C'est mal

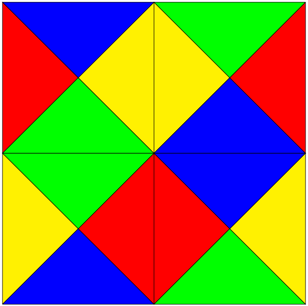
Contrairement aux pièces de puzzle, on interdit les rotations des tuiles de Wang.



Rotation des tuiles de Wang

C'est mal

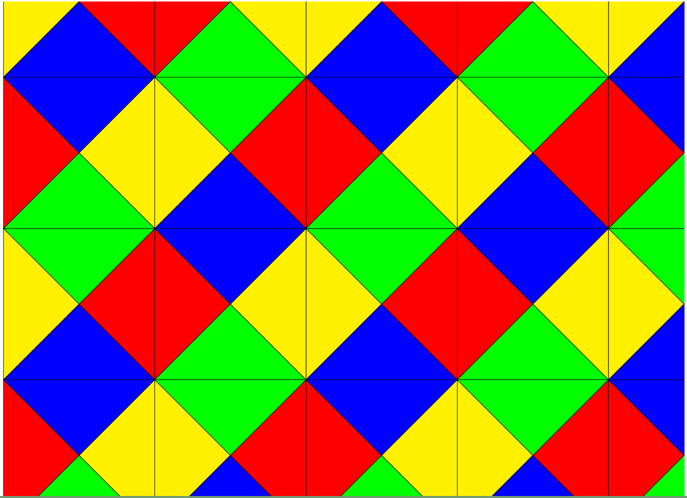
Contrairement aux pièces de puzzle, on interdit les rotations des tuiles de Wang.



Rotation des tuiles de Wang

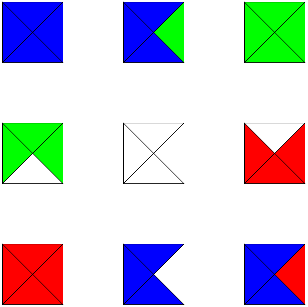
C'est mal

Contrairement aux pièces de puzzle, on interdit les rotations des tuiles de Wang.



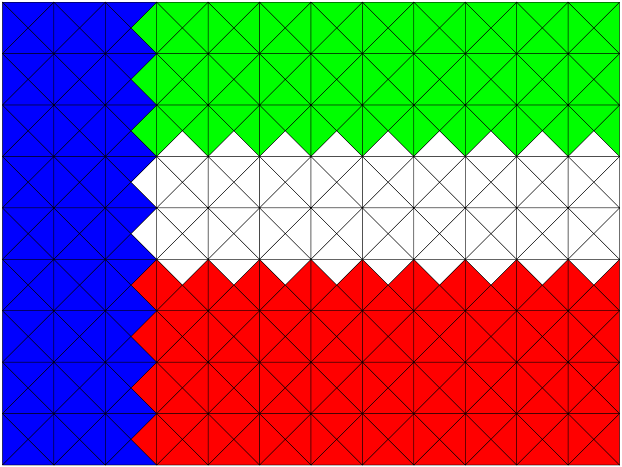
Exemple

Avec des drapeaux



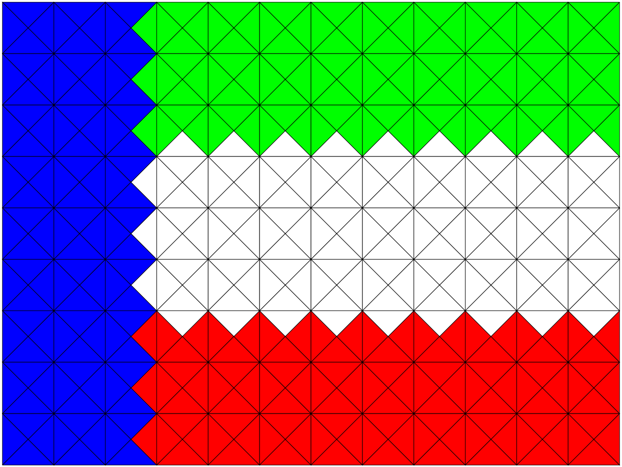
Exemple

Avec des drapeaux



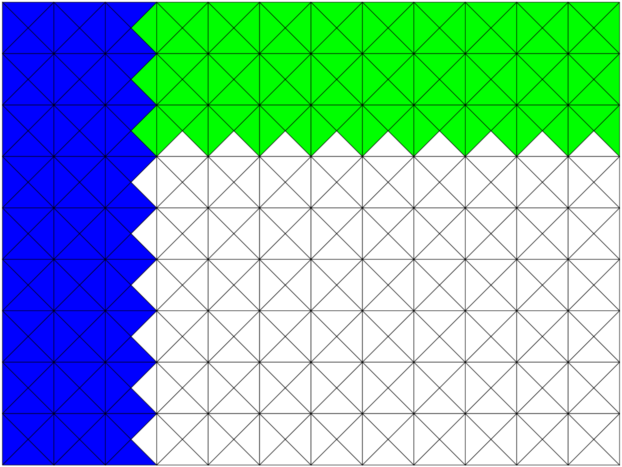
Exemple

Avec des drapeaux



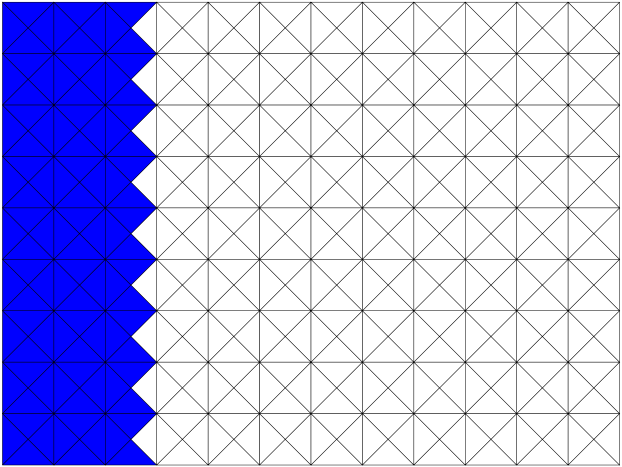
Exemple

Avec des drapeaux



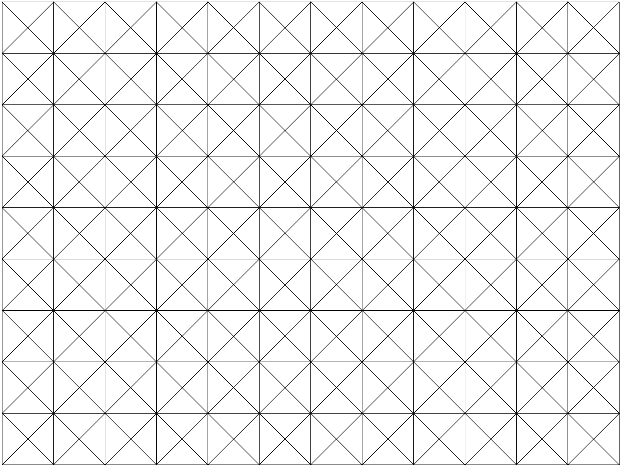
Exemple

Avec des drapeaux



Exemple

Avec des drapeaux



Quelques définitions

Parce qu'il en faut bien

Une configuration est une application qui associe à chaque point de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une tuile. On dit que c'est un pavage si l'agencement des tuiles est correct.

- Le translaté d'un pavage est encore un pavage.
- Une configuration dont tous les motifs finis sont correctement pavés est un pavage.

Quelques définitions

Parce qu'il en faut bien

Une configuration est une application qui associe à chaque point de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une tuile. On dit que c'est un pavage si l'agencement des tuiles est correct.

- Le translaté d'un pavage est encore un pavage.
- Une configuration dont tous les motifs finis sont correctement pavés est un pavage.

Quelques définitions

Parce qu'il en faut bien

Une configuration est une application qui associe à chaque point de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une tuile. On dit que c'est un pavage si l'agencement des tuiles est correct.

- Le translaté d'un pavage est encore un pavage.
- Une configuration dont tous les motifs finis sont correctement pavés est un pavage.

La question

Mais sans la réponse

Étant donné un ensemble de tuiles de Wang, est-ce que cet ensemble permet de paver le plan ?

Compacité

Le principe le plus important de l'exposé

Proposition

Un ensemble de tuiles de Wang permet de paver le plan tout entier si et seulement si il permet de paver tout carré $n \times n$

Corollaire

Il existe un algorithme qui étant donné un ensemble de tuiles de Wang répond "non" s'il ne pave pas le plan, et boucle sinon.

$\Rightarrow$ facile.

Compacité

Le principe le plus important de l'exposé

Proposition

Un ensemble de tuiles de Wang permet de paver le plan tout entier si et seulement si il permet de paver tout carré $n \times n$

Corollaire

Il existe un algorithme qui étant donné un ensemble de tuiles de Wang répond “non” s'il ne pave pas le plan, et boucle sinon.

$\Rightarrow$ facile.

Compacité

Le principe le plus important de l'exposé

Proposition

Un ensemble de tuiles de Wang permet de paver le plan tout entier si et seulement si il permet de paver tout carré $n \times n$

Corollaire

Il existe un algorithme qui étant donné un ensemble de tuiles de Wang répond "non" s'il ne pave pas le plan, et boucle sinon.

$\Rightarrow$ facile.

Preuve

sans dessin

Idée : Soit C_n un carré bien pavé de taille $(n+1) \times (n+1)$

- Il y a un nombre fini de tuiles possibles au centre d'un carré. Il y a donc une tuile qui se trouve au centre d'un nombre infini de carrés.
- Dans cet ensemble de carrés, il y a un nombre fini de façons de remplir le carré 3×3 au centre, il existe donc un carré 3×3 au centre d'un nombre infini de carrés
- On continue.

On construit ainsi par récurrence une suite D_n de carrés centrés en 0 de taille $(n+1) \times (n+1)$ telle que D_n soit au centre de D_{n+1} et D_n apparaît dans un nombre infini de carrés. La “limite” $D = \lim D_n$ est alors un pavage du plan.

Preuve
sans dessin

Idée : Soit C_n un carré bien pavé de taille $(n+1) \times (n+1)$

- Il y a un nombre fini de tuiles possibles au centre d'un carré. Il y a donc une tuile qui se trouve au centre d'un nombre infini de carrés.
- Dans cet ensemble de carrés, il y a un nombre fini de façons de remplir le carré 3×3 au centre, il existe donc un carré 3×3 au centre d'un nombre infini de carrés
- On continue.

On construit ainsi par récurrence une suite D_n de carrés centrés en 0 de taille $(n+1) \times (n+1)$ telle que D_n soit au centre de D_{n+1} et D_n apparaît dans un nombre infini de carrés. La “limite” $D = \lim D_n$ est alors un pavage du plan.

Preuve

sans dessin

Idée : Soit C_n un carré bien pavé de taille $(n+1) \times (n+1)$

- Il y a un nombre fini de tuiles possibles au centre d'un carré. Il y a donc une tuile qui se trouve au centre d'un nombre infini de carrés.
- Dans cet ensemble de carrés, il y a un nombre fini de façons de remplir le carré 3×3 au centre, il existe donc un carré 3×3 au centre d'un nombre infini de carrés
- On continue.

On construit ainsi par récurrence une suite D_n de carrés centrés en 0 de taille $(n+1) \times (n+1)$ telle que D_n soit au centre de D_{n+1} et D_n apparaît dans un nombre infini de carrés. La "limite" $D = \lim D_n$ est alors un pavage du plan.

Preuve

sans dessin

Idée : Soit C_n un carré bien pavé de taille $(n+1) \times (n+1)$

- Il y a un nombre fini de tuiles possibles au centre d'un carré. Il y a donc une tuile qui se trouve au centre d'un nombre infini de carrés.
- Dans cet ensemble de carrés, il y a un nombre fini de façons de remplir le carré 3×3 au centre, il existe donc un carré 3×3 au centre d'un nombre infini de carrés
- On continue.

On construit ainsi par récurrence une suite D_n de carrés centrés en 0 de taille $(n+1) \times (n+1)$ telle que D_n soit au centre de D_{n+1} et D_n apparaît dans un nombre infini de carrés. La “limite” $D = \lim D_n$ est alors un pavage du plan.

Preuve
sans dessin

Idée : Soit C_n un carré bien pavé de taille $(n+1) \times (n+1)$

- Il y a un nombre fini de tuiles possibles au centre d'un carré. Il y a donc une tuile qui se trouve au centre d'un nombre infini de carrés.
- Dans cet ensemble de carrés, il y a un nombre fini de façons de remplir le carré 3×3 au centre, il existe donc un carré 3×3 au centre d'un nombre infini de carrés
- On continue.

On construit ainsi par récurrence une suite D_n de carrés centrés en 0 de taille $(n+1) \times (n+1)$ telle que D_n soit au centre de D_{n+1} et D_n apparaît dans un nombre infini de carrés. La “limite” $D = \lim D_n$ est alors un pavage du plan.

Conjecture

dûe à Wang

Conjecture

Tout jeu de tuiles admet un pavage périodique.

Un pavage est dit périodique s'il a une période horizontale et une période verticale.

Corollaire

Il existe un algorithme qui étant donné un jeu de tuiles répond "oui" s'il pave le plan, et boucle sinon.

On cherche, pour chaque n, toutes les façons de paver un carré $n \times n$. Si on en trouve une qui permet de paver périodiquement le plan, on s'arrête.

Conjecture

dûe à Wang

Conjecture

Tout jeu de tuiles admet un pavage périodique.

Un pavage est dit périodique s'il a une période horizontale et une période verticale.

Corollaire

Il existe un algorithme qui étant donné un jeu de tuiles répond "oui" s'il pave le plan, et boucle sinon.

On cherche, pour chaque n, toutes les façons de paver un carré $n \times n$. Si on en trouve une qui permet de paver périodiquement le plan, on s'arrête.

Corollaire de la Conjecture

qui est fausse, mais chut ! il ne faut pas le dire

Corollaire

Il existe un algorithme qui étant donné un jeu de tuiles répond "oui" s'il pave le plan, et "non" sinon.

On lance les deux algorithmes précédents, et on attend qu'un des deux s'arrête.

Comment prouver la conjecture

toujours aussi fausse

Un pavage périodique du plan de période p ne contient qu'au maximum p^2 motifs distincts de taille $n \times n$.
D'un certain côté, on pourrait dire que les pavages périodiques sont ceux qui ont “le moins” de motifs.

Ordre

Défini à partir des motifs

$X \prec Y$ si tout motif présent dans X est aussi présent dans Y.

Pour prouver la conjecture, il faudrait

- Démontrer que tout jeu de tuiles engendre un pavage “minimal”.
- Que ce pavage minimal est périodique.

Ordre

Défini à partir des motifs

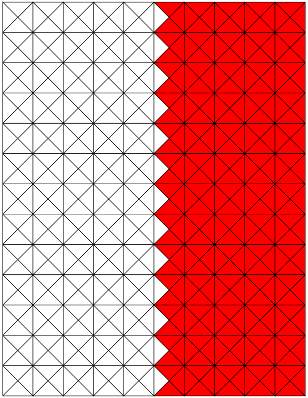
$X \prec Y$ si tout motif présent dans X est aussi présent dans Y.

Pour prouver la conjecture, il faudrait

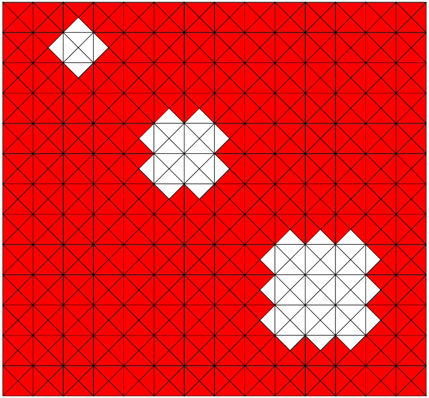
- Démontrer que tout jeu de tuiles engendre un pavage “minimal”.
- Que ce pavage minimal est périodique.

Un exemple

Avec des carrés

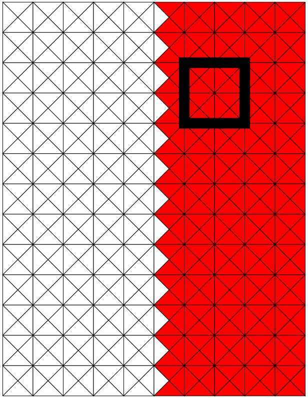


$\prec$

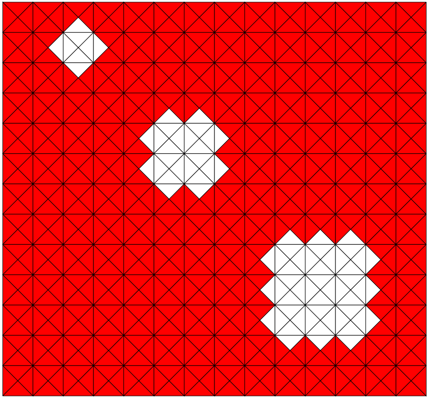


Un exemple

Avec des carrés

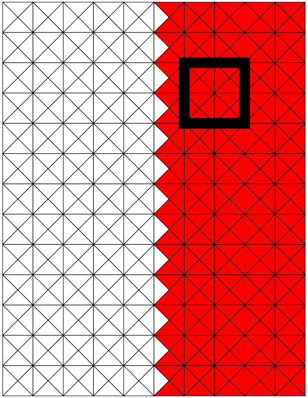


$\prec$

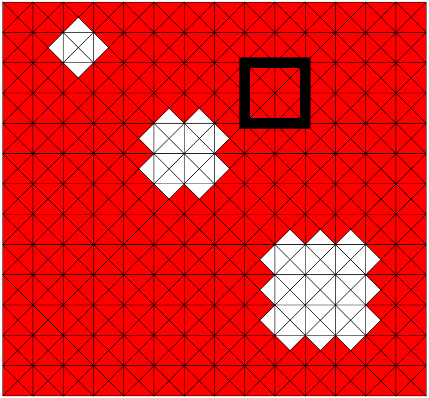


Un exemple

Avec des carrés

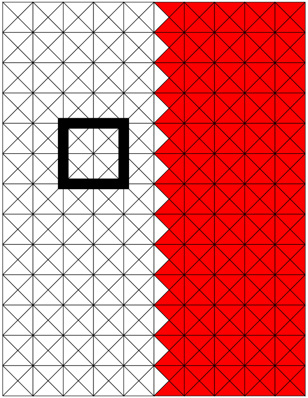


$\prec$

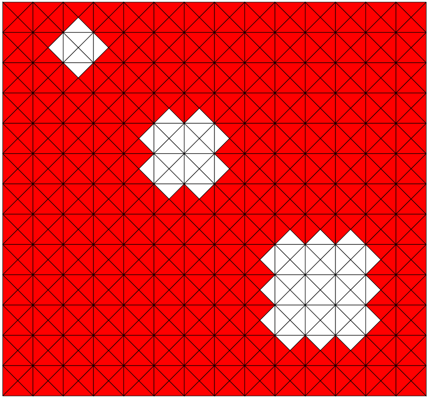


Un exemple

Avec des carrés

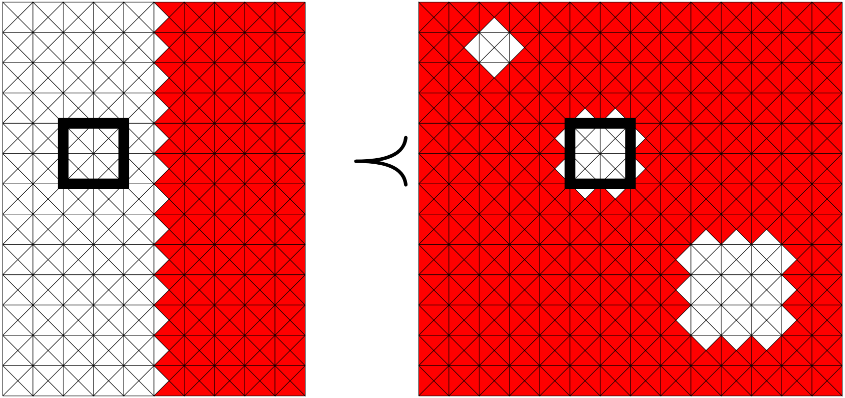


$\prec$



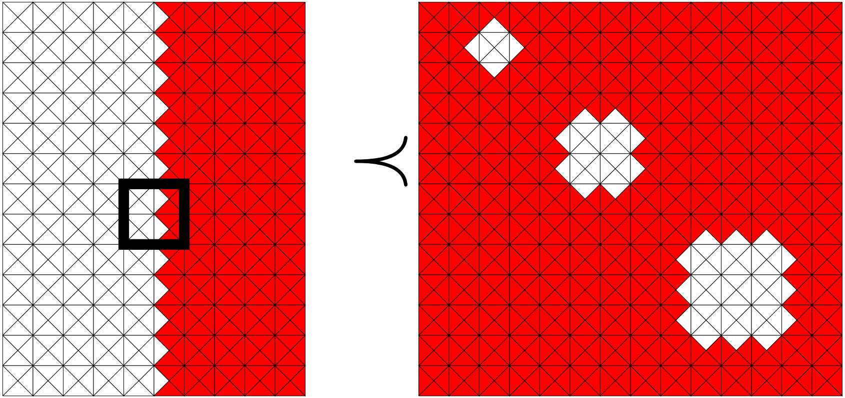
Un exemple

Avec des carrés



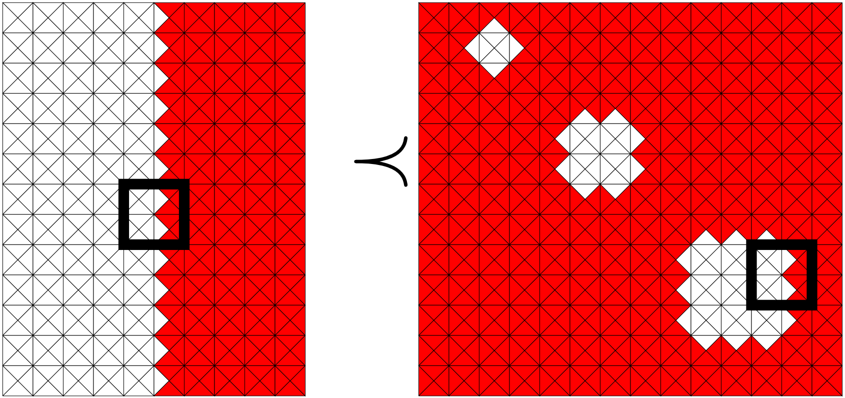
Un exemple

Avec des carrés



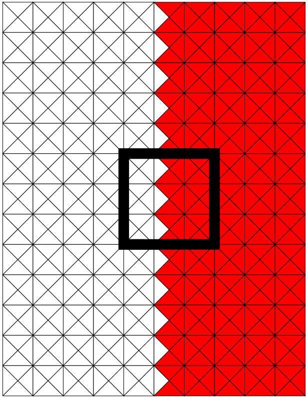
Un exemple

Avec des carrés

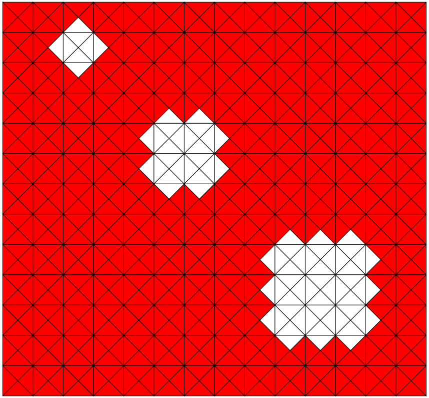


Un exemple

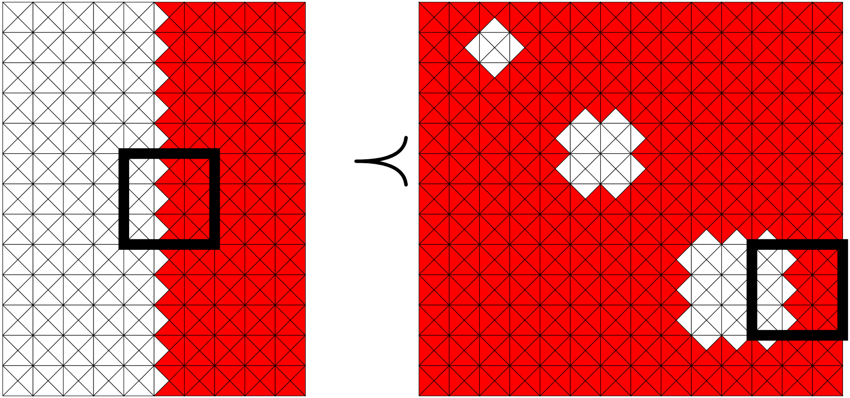
Avec des carrés



$\prec$

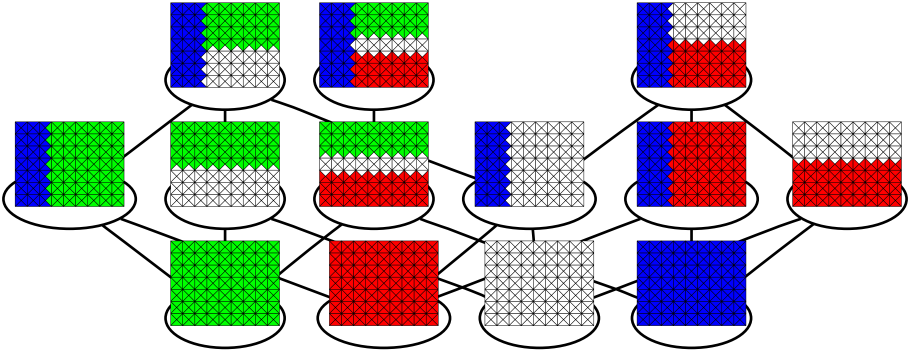


Un exemple
Avec des carrés



Retour sur l'exemple

Avec un joli diagramme de Hasse



Premières propriétés

et autres reformulations

- $\prec$ est un préordre
- $A \prec X$ si et seulement si A ne contient pas de motifs non présents dans X
- Si $A \prec X$ alors A peut s'écrire comme la "limite" de motifs P_i, chacun des motifs P_i étant contenu dans X.

Premières propriétés

et autres reformulations

- $\prec$ est un préordre
- $A \prec X$ si et seulement si A ne contient pas de motifs non présents dans X
- Si $A \prec X$ alors A peut s'écrire comme la "limite" de motifs P_i, chacun des motifs P_i étant contenu dans X.

Premières propriétés

et autres reformulations

- $\prec$ est un préordre
- $A \prec X$ si et seulement si A ne contient pas de motifs non présents dans X
- Si $A \prec X$ alors A peut s'écrire comme la “limite” de motifs P_i, chacun des motifs P_i étant contenu dans X.

Premières propriétés
Equivalence

- On dit que $X \sim Y$ si $X \prec Y$ et $Y \prec X$
- Autrement dit, X et Y ont les mêmes motifs.
- Si X est un translaté de Y, $X \sim Y$.
- Il existe d'autres cas.

Premières propriétés

Equivalence

- On dit que $X \sim Y$ si $X \prec Y$ et $Y \prec X$
- Autrement dit, X et Y ont les mêmes motifs.
- Si X est un translaté de Y, $X \sim Y$.
- Il existe d'autres cas.

Premières propriétés

Equivalence

- On dit que $X \sim Y$ si $X \prec Y$ et $Y \prec X$
- Autrement dit, X et Y ont les mêmes motifs.
- Si X est un translaté de Y, $X \sim Y$.
- Il existe d'autres cas.

Premières propriétés
Equivalence

- On dit que $X \sim Y$ si $X \prec Y$ et $Y \prec X$
- Autrement dit, X et Y ont les mêmes motifs.
- Si X est un translaté de Y, $X \sim Y$.
- Il existe d'autres cas.

Propriétés closes

Héritage

- Si $X \prec Y$ et si X est une configuration et que Y est un pavage, alors X est en fait un pavage.
- Si $X \prec Y$ et Y a un vecteur $\vec{v}$ de périodicité, alors X aussi.
- Si $X \prec Y$ et Y est périodique de période p, alors X aussi. En fait $X \sim Y$.

Propriétés closes

Héritage

- Si $X \prec Y$ et si X est une configuration et que Y est un pavage, alors X est en fait un pavage.
- Si $X \prec Y$ et Y a un vecteur $\vec{v}$ de périodicité, alors X aussi.
- Si $X \prec Y$ et Y est périodique de période p, alors X aussi. En fait $X \sim Y$.

Propriétés closes

Héritage

- Si $X \prec Y$ et si X est une configuration et que Y est un pavage, alors X est en fait un pavage.
- Si $X \prec Y$ et Y a un vecteur $\vec{v}$ de périodicité, alors X aussi.
- Si $X \prec Y$ et Y est périodique de période p, alors X aussi. En fait $X \sim Y$.

Le langage des motifs

Outil pour manipuler l'ordre

Si X est un pavage, on note $L(X)$ l'ensemble des motifs que contient X.

$$X \prec Y \iff L(X) \subseteq L(Y)$$

Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide

Propriété du langage

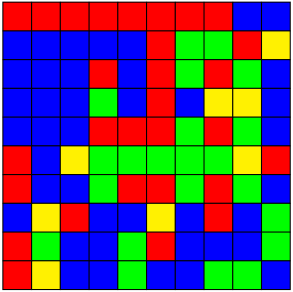
L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

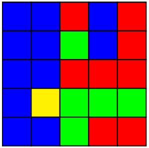
1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

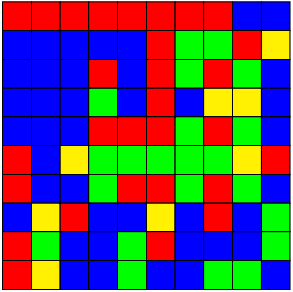


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

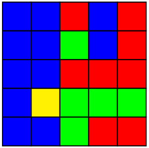


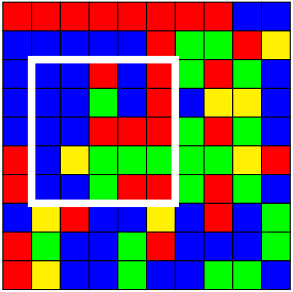


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

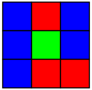


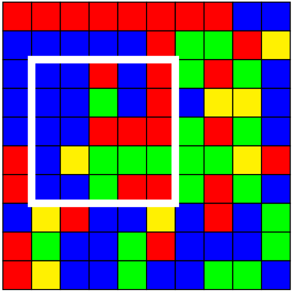


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

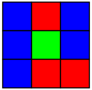


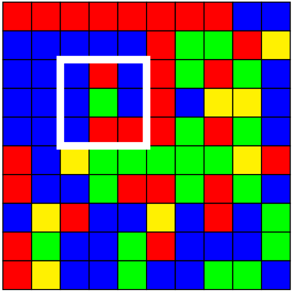


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.





Propriété du langage

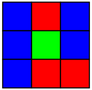
L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

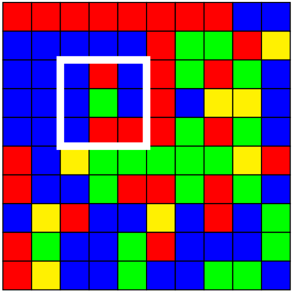
1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.

Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.

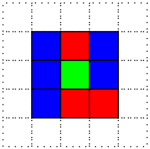


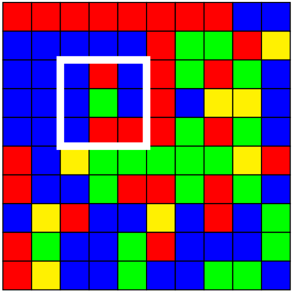


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.

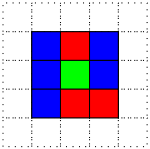


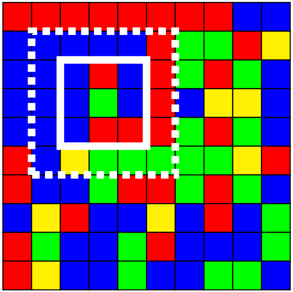


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.

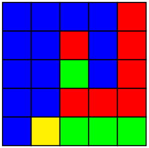


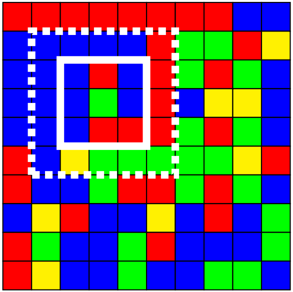


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.





Propriété du langage

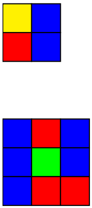
L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

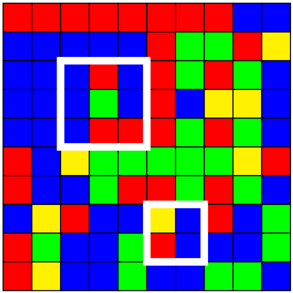
1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
4. Si M_1 et M_2 sont deux motifs de $\mathcal{S}$, il existe M dans $\mathcal{S}$ qui contient les deux à la fois.

Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
4. Si M_1 et M_2 sont deux motifs de $\mathcal{S}$, il existe M dans $\mathcal{S}$ qui contient les deux à la fois.

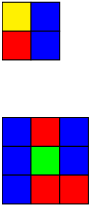


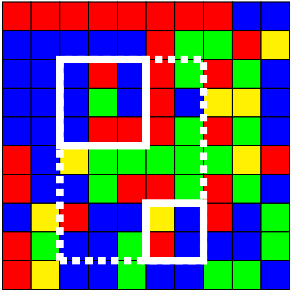


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
4. Si M_1 et M_2 sont deux motifs de $\mathcal{S}$, il existe M dans $\mathcal{S}$ qui contient les deux à la fois.

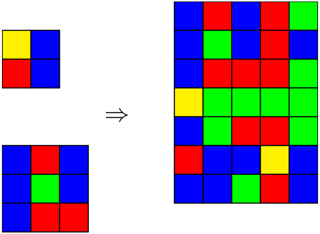


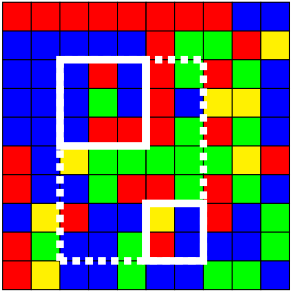


Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
4. Si M_1 et M_2 sont deux motifs de $\mathcal{S}$, il existe M dans $\mathcal{S}$ qui contient les deux à la fois.





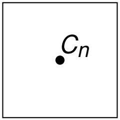
Propriété du langage

L'ensemble des motifs $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ d'un pavage T vérifie :

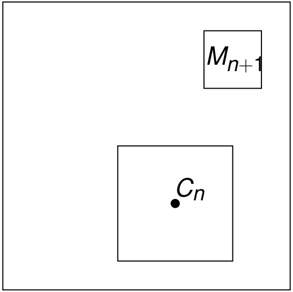
1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
4. Si M_1 et M_2 sont deux motifs de $\mathcal{S}$, il existe M dans $\mathcal{S}$ qui contient les deux à la fois.

Et la réciproque est vraie : Pour tout ensemble $\mathcal{S}$ qui vérifie ses propriétés, on peut trouver un pavage T tel que $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{T})$.

Soit M_n la liste (infinie) des motifs de $\mathcal{S}$. On va construire une suite croissante C_n de motifs centrés en 0 telle que C_n contienne tous les motifs de 1 à n.



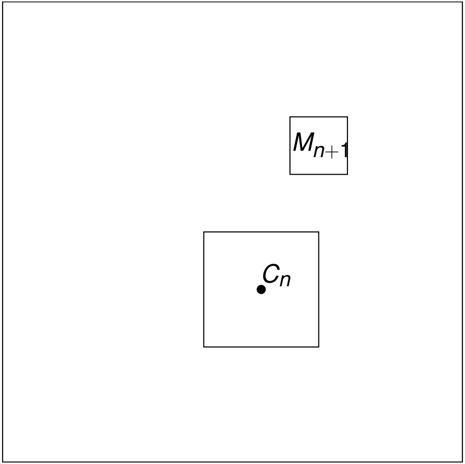
Soit M_n la liste (infinie) des motifs de $\mathcal{S}$. On va construire une suite croissante C_n de motifs centrés en 0 telle que C_n contienne tous les motifs de 1 à n.



Propriété du langage

Réciproque

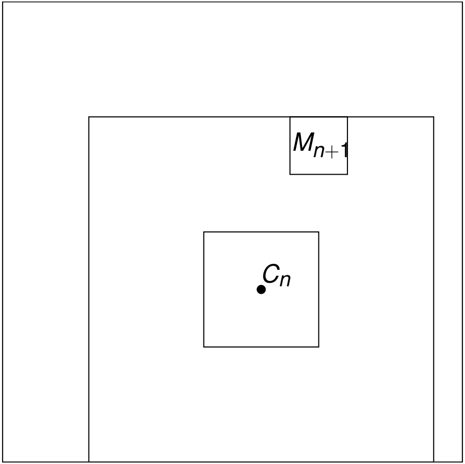
Soit M_n la liste (infinie) des motifs de $\mathcal{S}$. On va construire une suite croissante C_n de motifs centrés en 0 telle que C_n contienne tous les motifs de 1 à n.



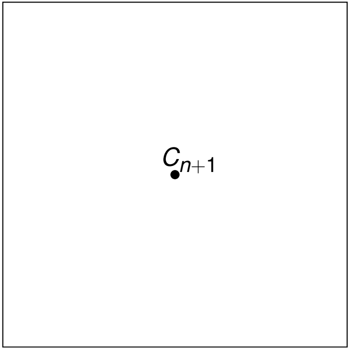
Propriété du langage

Réciproque

Soit M_n la liste (infinie) des motifs de $\mathcal{S}$. On va construire une suite croissante C_n de motifs centrés en 0 telle que C_n contienne tous les motifs de 1 à n.



Soit M_n la liste (infinie) des motifs de $\mathcal{S}$. On va construire une suite croissante C_n de motifs centrés en 0 telle que C_n contienne tous les motifs de 1 à n.



Propriété des langages

Fin

Soit un ensemble de motifs $\mathcal{S}$ qui vérifie :

1. $\mathcal{S}$ est non vide
2. Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
3. Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.

Alors il existe un pavage dont l'ensemble des motifs est *inclus* dans $\mathcal{S}$.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs. Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.

- $\mathcal{S}$ est non vide.
- Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
- Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
- Soit M et N deux motifs de $\mathcal{S}$. Ils appartiennent à $\mathcal{S}(T_i)$ et $\mathcal{S}(T_j)$. On peut supposer $T_i \prec T_j$ (puisque E est ordonné). Dans ce cas M et N appartiennent tous les deux à $\mathcal{S}(T_j)$ donc on peut trouver un motif qui les contient tous deux.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs. Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.

- $\mathcal{S}$ est non vide.
- Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
- Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
- Soit M et N deux motifs de $\mathcal{S}$. Ils appartiennent à $\mathcal{S}(T_i)$ et $\mathcal{S}(T_j)$. On peut supposer $T_i \prec T_j$ (puisque E est ordonné). Dans ce cas M et N appartiennent tous les deux à $\mathcal{S}(T_j)$ donc on peut trouver un motif qui les contient tous deux.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs. Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.

- $\mathcal{S}$ est non vide.
- Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
- Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
- Soit M et N deux motifs de $\mathcal{S}$. Ils appartiennent à $\mathcal{S}(T_i)$ et $\mathcal{S}(T_j)$. On peut supposer $T_i \prec T_j$ (puisque E est ordonné). Dans ce cas M et N appartiennent tous les deux à $\mathcal{S}(T_j)$ donc on peut trouver un motif qui les contient tous deux.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs. Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.

- $\mathcal{S}$ est non vide.
- Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
- Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
- Soit M et N deux motifs de $\mathcal{S}$. Ils appartiennent à $\mathcal{S}(T_i)$ et $\mathcal{S}(T_j)$. On peut supposer $T_i \prec T_j$ (puisque E est ordonné). Dans ce cas M et N appartiennent tous les deux à $\mathcal{S}(T_j)$ donc on peut trouver un motif qui les contient tous deux.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs. Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.

- $\mathcal{S}$ est non vide.
- Tout sous-motif d'un motif de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.
- Tout motif M de $\mathcal{S}$ est prolongeable en un motif de $\mathcal{S}$ plus grand qui contient M en son centre.
- Soit M et N deux motifs de $\mathcal{S}$. Ils appartiennent à $\mathcal{S}(T_i)$ et $\mathcal{S}(T_j)$. On peut supposer $T_i \prec T_j$ (puisque E est ordonné). Dans ce cas M et N appartiennent tous les deux à $\mathcal{S}(T_j)$ donc on peut trouver un motif qui les contient tous deux.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs.
Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.
Il existe un pavage U dont l'ensemble des motifs est exactement $\mathcal{S}(\mathcal{T})$.

- U est plus grand que tous les éléments de E
- U est le plus petit parmi les plus grands.

Donc U est bien la borne sup de E.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs.
Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.
Il existe un pavage U dont l'ensemble des motifs est exactement $\mathcal{S}(\mathcal{T})$.

- U est plus grand que tous les éléments de E
- U est le plus petit parmi les plus grands.

Donc U est bien la borne sup de E.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs.
Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.
Il existe un pavage U dont l'ensemble des motifs est exactement $\mathcal{S}(\mathcal{T})$.

- U est plus grand que tous les éléments de E
- U est le plus petit parmi les plus grands.

Donc U est bien la borne sup de E.

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs.
Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$.
Il existe un pavage U dont l'ensemble des motifs est exactement $\mathcal{S}(\mathcal{T})$.

- U est plus grand que tous les éléments de E
- U est le plus petit parmi les plus grands.

Donc U est bien la borne sup de E. □

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs.
Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$. ... $\square$

Corollaire

Une première propriété de l'ordre $\prec$

Théorème

Tout ensemble E totalement ordonné pour $\prec$ a une borne supérieure.

Démonstration.

Pour chaque pavage T de E, soit $\mathcal{S}(T)$ son ensemble de motifs.
Posons enfin $\mathcal{S} = \cup_T \mathcal{S}(T)$. $\ldots$ $\square$

Corollaire

Il existe un pavage maximal.

On ne fait pas tout ça pour rien

Le but est de montrer qu'il existe un pavage minimal, puis qu'il existe un pavage périodique.

On pourrait utiliser un raisonnement similaire, en faisant une intersection au lieu d'une union, mais on va faire autrement.

Existence d'un minimal

Preuve constructive

Idée : On va construire un langage qui ne contient que des motifs qui sont *nécessaires*. Un motif est nécessaire s'il est impossible de paver sans utiliser ce motif.
Numérotons tous les motifs M_n.
On construit deux langages

- L_p contient les motifs nécessaires parmi les p premiers motifs
- U_p contient les motifs inutiles parmi les p premiers motifs

Pour chaque motif M_{p+1}

- S'il existe un pavage qui n'utilise aucun des motifs de U_p ni M_{p+1}, poser $U_{p+1} := U_p \cup \{M_{p+1}\}$
- Sinon poser $L_{p+1} := L_p \cup \{M_{p+1}\}$.

Enfin $L = \cup L_p$

Existence d'un minimal

Preuve (suite)

- L est non vide : il contient au moins un motif 1×1
- Tout sous-motif d'un motif de L est dans L : Si on n'arrive pas à se passer de M, on ne peut pas se passer des motifs qu'il contient.
- Tout motif M est prolongeable : Si on n'arrive pas à se passer d'un M de taille $n \times n$, c'est qu'on n'arrive pas à se passer d'un des motifs de taille $(n+2) \times (n+2)$ qui contiennent M.

En conclusion, il existe un pavage T tel que $\mathcal{S}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{L}$. Par construction, T est minimal (et en fait $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{L}$.

Existence d'un minimal

Preuve (suite)

- L est non vide : il contient au moins un motif 1×1
- Tout sous-motif d'un motif de L est dans L : Si on n'arrive pas à se passer de M, on ne peut pas se passer des motifs qu'il contient.
- Tout motif M est prolongeable : Si on n'arrive pas à se passer d'un M de taille $n \times n$, c'est qu'on n'arrive pas à se passer d'un des motifs de taille $(n+2) \times (n+2)$ qui contiennent M.

En conclusion, il existe un pavage T tel que $\mathcal{S}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{L}$. Par construction, T est minimal (et en fait $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{L}$.

Existence d'un minimal

Preuve (suite)

- L est non vide : il contient au moins un motif 1×1
- Tout sous-motif d'un motif de L est dans L : Si on n'arrive pas à se passer de M, on ne peut pas se passer des motifs qu'il contient.
- Tout motif M est prolongeable : Si on n'arrive pas à se passer d'un M de taille $n \times n$, c'est qu'on n'arrive pas à se passer d'un des motifs de taille $(n+2) \times (n+2)$ qui contiennent M.

En conclusion, il existe un pavage T tel que $\mathcal{S}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{L}$. Par construction, T est minimal (et en fait $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{L}$.

- L est non vide : il contient au moins un motif 1×1
- Tout sous-motif d'un motif de L est dans L : Si on n'arrive pas à se passer de M, on ne peut pas se passer des motifs qu'il contient.
- Tout motif M est prolongeable : Si on n'arrive pas à se passer d'un M de taille $n \times n$, c'est qu'on n'arrive pas à se passer d'un des motifs de taille $(n+2) \times (n+2)$ qui contiennent M.

En conclusion, il existe un pavage T tel que $\mathcal{S}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{L}$. Par construction, T est minimal (et en fait $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{L}$.

Minimaux

Espoir

On a prouvé qu'il existait toujours un minimal.

Il reste à prouver que les minimaux sont périodiques.

Théorème

Un pavage minimal T est quasipériodique : Pour tout motif M, il existe une taille p tel que M soit contenu dans tout motif de taille $p \times p$.

Idée : si on trouve dans T des motifs arbitrairement grands qui ne contiennent pas M, on peut construire un pavage inférieur à T qui ne contient pas M.

Il reste à montrer que T est en fait périodique.

Quasipériodicité

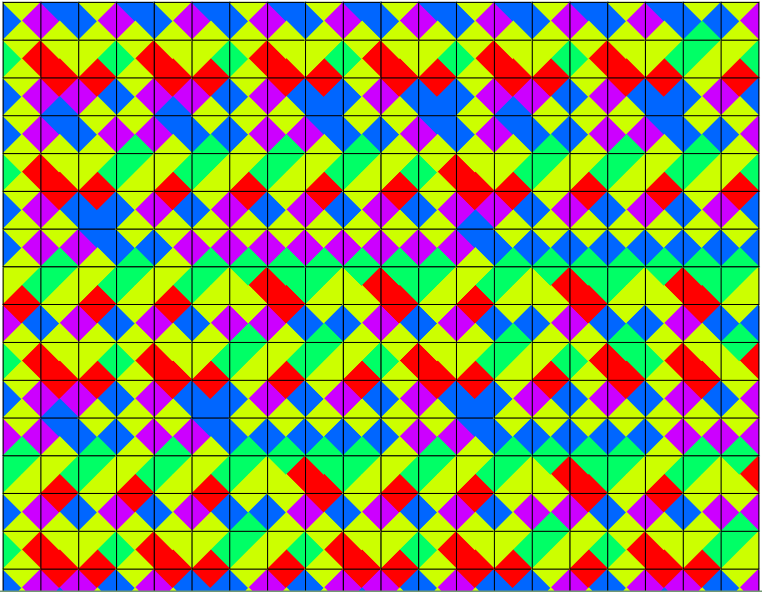
Echec

Théorème

Il existe un jeu de tuiles de Wang qui ne permet de construire aucun pavage périodique.

Quasipériodicité

Echec illustré



Première conclusion

C'est raté pour la conjecture

La conjecture de Wang s'effondre. (Berger, '64)
Cependant, on a démontré que tout jeu de tuiles produisait un pavage quasipériodique (Durand, '97)

Deuxième conclusion

Indécidabilité

La conjecture de Wang, si elle était vraie, permettait de prouver qu'il existe un algorithme qui décide si un jeu de tuiles pave le plan.

Théorème

Il n'existe aucun algorithme qui permette de décider si un jeu de tuile pave le plan.

Vraie conclusion

Mais il y a encore des transparents

- On a présenté les tuiles de Wang
- On a essayé de les étudier à travers un ordre naturel dessus
- Notre étude a permis de démontrer qu'il existait toujours un pavage quasipériodique, mais n'a pas réussi à montrer qu'il existait toujours un périodique (puisque c'est faux)

Prolongations

Cette fois c'est fini

On a étudié les pavages d'un point de vue combinatoire, mais on peut aussi

- Les étudier comme un système dynamique (me demander)
- Les étudier d'un point de vue topologique (me demander)
- Les étudier d'un point de vue théorie des modèles (me demander)
- Les étudier d'un point de vue ergodique (ne pas me demander)
- Les étudier d'un point de vue quasicristaux (oublier)