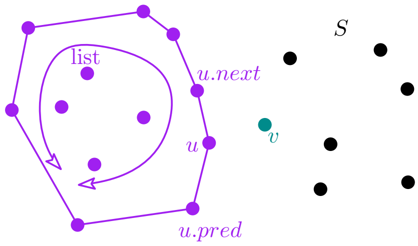
Exercice 1. Enveloppes convexes par triangulations

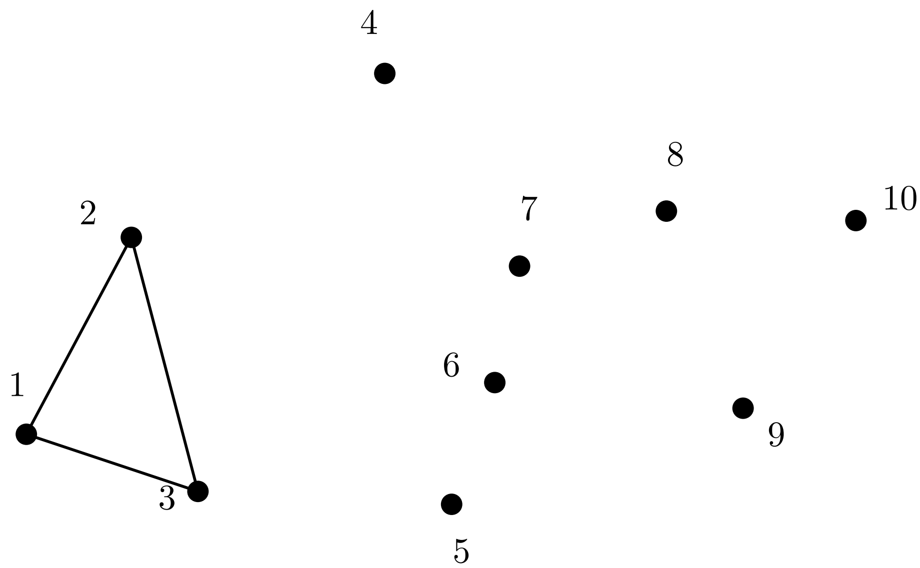
Considérons l'algorithme suivant.

Input : S a point set.

sort S by x-coordinate;
create a circular list with the three leftmost points of S
    such that $(u, u.next, u.next.next)$ is positively oriented and u rightmost;
$S = S \setminus \{u, u.next, u.next.next\}$;
while $S \neq \emptyset$ {
    v =leftmost point in S;
    $S = S \setminus \{v\}$;
    $w = copy(u)$; ●
    while $(v, u, u.next)$ negative
        $\{u = u.next;\}$ ●
    $v.next = u$; $u.pred = v$;
    while $(v, w, w.pred)$ positive
        $\{w = w.pred;\}$ ●
    $v.pred = w$; $w.next = v$;
    $u = v$;
}

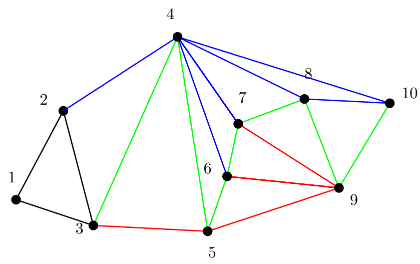


1. Executer à la main l'algorithme sur l'entrée ci-dessous. Dessiner le segment uv (resp wv) en vert/bleu (resp. rouge) à chaque fois que l'instruction marquée ●/● (resp. ●) est exécutée.



2. Donner, en la justifiant, la complexité asymptotique pire-cas de cet algorithme sur un ensemble de n points. *(Indication: utiliser la relation d'Euler.)*

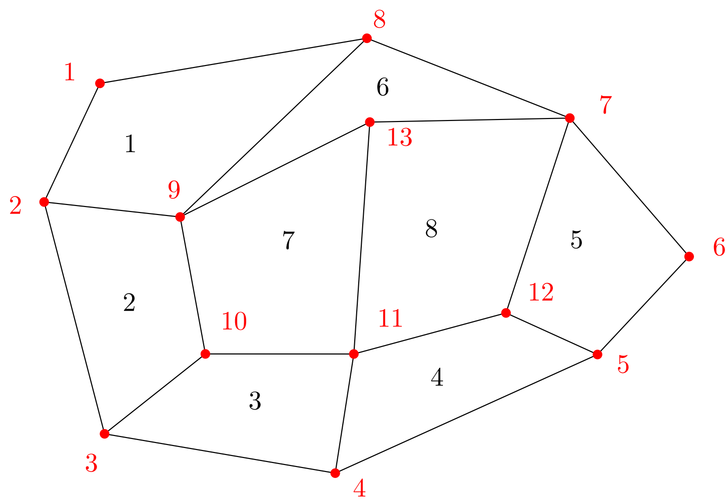
Question 1



Question 2

Sorting step is $O(n \log n)$.
The complexity of the rest is bounded (up to a constant) by the number of times that the algorithm goes through the lines marked by the three dots. Each time the algorithm goes there, one can trace an edge of a triangulation of the points, thus the complexity is the number of edges in a triangulation.
Compared to the situation during the lecture (3D convex hull), the infinite face is of some unknown size $k \leq n$. Let e be the number of edges, and t the number of triangles. On the one hand, we have $(t+1) - e + n = 2$ (Euler relation). On the other hand, each triangle has three edges, each edge is in two faces: $2e = k + 3t$. One can deduce $e = 3n$.
Thus after the sorting preprocessing, the algorithm is linear.

Exercice 2. Degré d'un point dans une quadrangulation



On suppose donné un maillage d'un polygone à k cotés en q quadrilatères. Les quadrilatères ne sont pas forcément convexes, et peuvent utiliser des sommets intérieurs au polygone. Dans la figure on a $k = 8$, $q = 8$ et $n = 13$.

1. Quel est le nombre n de sommets en fonction de q et k ?

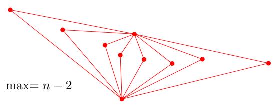
   Si e est le nombres d'arêtes.
   Euler: $(q + 1) - e + n = 2$.

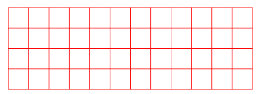
Toutes les faces sont des quads sauf la face infinie, chaque arête est dans deux faces: $k + 4q = 2e$.
Ce qui nous donne $4 = 2(q+1)-(k+4q)+2n$ soit $n = \frac{1}{2}(4-2q-2+k+4q) = 1 + q + \frac{k}{2}$.

2. En déduire une approximation du degré moyen d'un sommet dans la triangulation en fonction de n lorsque n est beaucoup plus grand que k.

   Le degré moyen est $\frac{1}{n}\sum_{v\in S} d^\circ(v) = \frac{2e}{n} = \frac{k+4(n-1-\frac{k}{2})}{n} = 4 - \frac{k}{n} - \frac{4}{n} \simeq 4$

3. Quel est le degré maximum d'un point particulier ? Dessiner un exemple.

   
   degré moyen pour presque tout le monde

   Le degré maximum d'un point est $n-2$

4. Est-il possible de quadranguler un triangle (rappel : on autorise des points intérieurs).

   On ne peut pas quadranguler un triangle ou tout autre polygone avec un nombre impair de sommets car si k est inpair on obtient une valeur non entière pour n ce qui est évidemment impossible.

Exercice 3. D'autres tests basés sur l'orientation

On suppose donnés 4 points P, Q, R et S du plan.

1. On suppose tout d'abord que parmi ces 4 points, aucun triplet n'est aligné. Donner un algorithme qui décide si les segments PQ et RS se coupent et qui n'utilise que des `if` et des tests d'orientation impliquant ces 4 points.

   La réponse est que

   $$PQ \text{ et } RS \text{ se coupent} \quad \Leftrightarrow \quad PQR \neq PQS \quad \text{et} \quad RSP \neq RSQ.$$

   Détaillons cela.

   - Les droites (PQ) et (RS) sont distinctes (puisqu'aucun triplet n'est aligné). Si elles sont parallèles, l'énoncé est vrai car les segments ne se coupent pas et $PQR = PQS$. Supposons donc les droites non-parallèles.
   - Les droites (PQ) et (RS) se coupent en exactement un point, notons le I. Les segments PQ et RS se coupent si et seulement si I appartient à chacun de chacun de ces segments. Comme $I \notin \{P, Q, R, S\}$, car aucun triplet n'est aligné, I appartient à PQ si et seulement si la droite (RS) sépare P de Q, ce qui est équivalent en terme d'orientations à $RSP \neq RSQ$. De même, I appartient à RS si et seulement si $PQR \neq PQS$.

2. Même question que précédemment, mais dans le cas où on suppose que les points sont deux à deux distincts et que les 4 points ne sont pas alignés.

   La seule différence par rapport à la question précédente est que le point I peut être une des extrémités d'un segment. Le test précédent reste valide, la seule différence étant que l'une des orientations s'annule.

3. La question précédente admet-elle une solution si on suppose seulement que les points sont deux à deux distincts ?

   Non. Si les points sont alignés, l'orientation de chaque triplet est nulle. Dès lors, on ne peut pas distinguer les deux entrées suivantes :