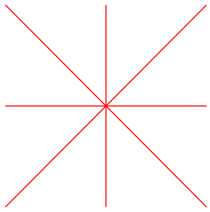
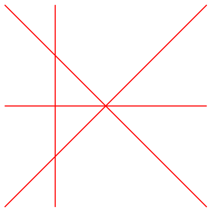
Exercice 1.

1. Dessiner deux exemples d'arrangement *non simple* de 4 droites dans le plan.





2. On considère, dans le plan, un arrangement simple $\mathcal{A}$ de n droites et d'un cercle C. On suppose que toutes les paires de droites se coupent à l'intérieur du disque bordé par C. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes bornées et de cellules bornées de $\mathcal{A}$.

   Considérons le graphe $G = (V, E)$ formé par les sommets et les arêtes *bornées* de $\mathcal{A}$. Par définition, ce graphe est planaire. L'arrangement étant simple, toute paire de droite se coupe. Ainsi, le disque bordé par C contient un point de chaque droite, et ce cercle coupe donc chacune des droites en deux points. Le nombre de sommets de G est donc $v = \binom{n}{2} + 2n$.

   Le nombre d'arêtes de G égale la moitié de la somme des degrés des sommets de G. Par définition, toute arête non-bornée de $\mathcal{A}$ a pour sommet l'intersection entre C et la droite supportant cette arête. Par conséquent, les sommets de G sur C sont de degré 3 et les autres sommets de G sont de degrés 4. Ainsi, le nombre d'arêtes est

$$e = \frac{1}{2}\left(4\binom{n}{2} + 3 \cdot 2n\right) = 2\binom{n}{2} + 3n$$

   Le graphe G détermine autant de cellules bornées que $\mathcal{A}$ et une seule cellule non bornée. Le nombre f de cellules peut donc se déterminer grâce à la relation d'Euler (sans oublier de compter la face non bornée). Comme $v - e + (f + 1) = 2$ on déduit

$$f = e - v + 1 = 2\binom{n}{2} + 3n - \left(\binom{n}{2} + 2n\right) + 1 = \binom{n}{2} + n + 1.$$

3. Considérons un arrangement simple de n droites du plan. Choisissons une cellule uniformément au hasard et notons X sa taille (nombre d'arêtes du bord). Quelle est approximativement l'espérance de X ? *(Une réponse à un terme additif* $o(1)$ *près suffit.)*

   La somme des tailles des cellules égale deux fois le nombre d'arêtes, puisque chaque arête est comptée pour les deux cellules auxquelles elle est adjacente. La taille moyenne d'une cellule est donc

$$\frac{2 \cdot \text{nombre d'arêtes}}{\text{nombre de cellules}} \approx 4.$$

   En particulier, ce nombre (exact) est le même pour tous les arrangements simples de n droites.

4. Expliciter un ensemble aussi simple que possible de prédicats permettant d'implémenter l'algorithme de calcul incrémental d'un arrangement de droites. (On ne cherchera pas ici à évaluer ces prédicats.)

   Cet algorithme demande de comparer les pentes de deux droites, et de déterminer si une droite coupe une arête de l'arrangement. Cette seconde décision peut se décomposer en plusieurs appels au prédicat suivant : étant donnés une droite orientée D et un sommet p, représenté par deux droites dont il est l'intersection, décider de quel côté de D se trouve p.

Exercice 2.

Considérons un arrangement simple de n droites du plan. Choisissons une cellule uniformément au hasard et notons X sa taille (nombre d'arêtes du bord). Quelle est approximativement l'espérance de X^2 ? *(Une réponse à un $O()$ près suffit)*

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \frac{1}{\text{nombre de cellules}} \sum_{c:\text{cellule}} (\text{taille de } c)^2 \\
&= \frac{1}{\text{nombre de cellules}} \sum_{c:\text{cellule}} \sum_{e_1,e_2:\text{arêtes de } c} 1 \\
&= \frac{1}{\text{nombre de cellules}} \sum_{e:\text{arête}} \text{taille des cellules incidentes à } e \\
&= \frac{1}{\text{nombre de cellules}} \sum_{\ell:\text{droite}} (\text{taille de la zone de } \ell + 2n) \\
&= \frac{1}{\text{nombre de cellules}} O(n^2) = O(1)
\end{aligned}
$$

Exercice 3.

1. Peut-on adapter l'algorithme de balayage pour le calcul d'un arrangement de droites du plan ? Si oui, quelle est la complexité de l'algorithme obtenu ?

   C'est possible. La principale différence est qu'il faut initialiser la liste des intersections par la liste des droites triées par leurs pentes. La complexité de l'algorithme ainsi obtenu est $O(n^2 \log n)$.

2. Adapter l'algorithme de balayage au calcul d'arrangement de cercles dans le plan.

   L'initialisation est identique, en remplaçant "extrémité de segment" par "point le plus à gauche et point le plus à droite du cercle". Chaque cercle coupé par la droite de balayage apparaît deux fois dans la liste des intersections de la droite de balayage avec l'arrangement (une branche haute et une branche basse). Chaque événement d'intersection indique quelles sont les branches (haute ou basse) qui se croisent.

3. Expliciter un ensemble aussi simple que possible de prédicats permettant d'implémenter cet algorithme.

   Il faut comparer les coordonnées x des points suivants : (1) extrémité gauche d'un cercle, (2) extrémité droite d'un cercle, (3) 1ère intersection de deux cercles, (4) 2ème intersection de deux cercles. À chaque fois, le point doit être représenté par les données d'entrées de l'algorithme, c'est à dire des cercles.