



# Planification stochastique

Modèles d'environnement, planification de trajectoires

Francis Colas

15 décembre 2022

01

Introduction

# Introduction

## Carte

- ▶ diversité de représentation
- ▶ indépendante du robot

## Espace de configuration

- ▶ espace continu
- ▶ espace libre de collision

## Algorithme de recherche

- ▶ entrée : arbre ou graphe
- ▶ sortie : chemin le plus court

## Problème

- ▶ définition d'un graphe ou un arbre?

# Introduction

## Problème

- ▶ définition d'un graphe ou un arbre?

## Approches

- ▶ décomposition de l'espace (semaine dernière)
- ▶ résolution géométrique (semaine dernière)
- ▶ échantillonnage

# 02

## *Probabilistic Roadmaps*

## Probabilistic Roadmaps (PRM)

### Principe

- ▶ création d'un graphe dans l'espace libre
  - ▶ échantillonner l'espace libre
  - ▶ relier les échantillons proches
- ▶ requête avec un départ et une arrivée
  - ▶ les relier au graphe
  - ▶ recherche de plus court chemin

### Questions

- ▶ stratégie d'échantillonnage
- ▶ vérification de collision
- ▶ stratégie de connexion

# Algorithme sPRM

## simplified PRM

```

V ← ∅; E ← ∅
for i = 1, ..., n do
  xrand ← SampleFree()
  V ← V ∪ {xrand}
  U ← Near(G = (V, E), xrand, δ)
  for all u ∈ U do
    if CollFree(xrand, u) then
      E ← E ∪ {{xrand, u}}
    end if
  end for
end for
return G = (V, E)

```

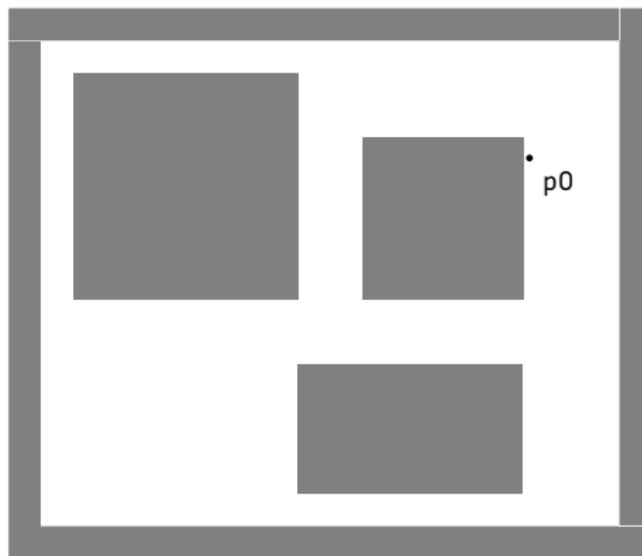
## Fonctions

- ▶ **SampleFree()** :  
échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ **Near(G, x, d)** : points de G à une distance de x inférieure à d
- ▶ **CollFree(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>)** : pas d'obstacle entre x<sub>1</sub> et x<sub>2</sub>

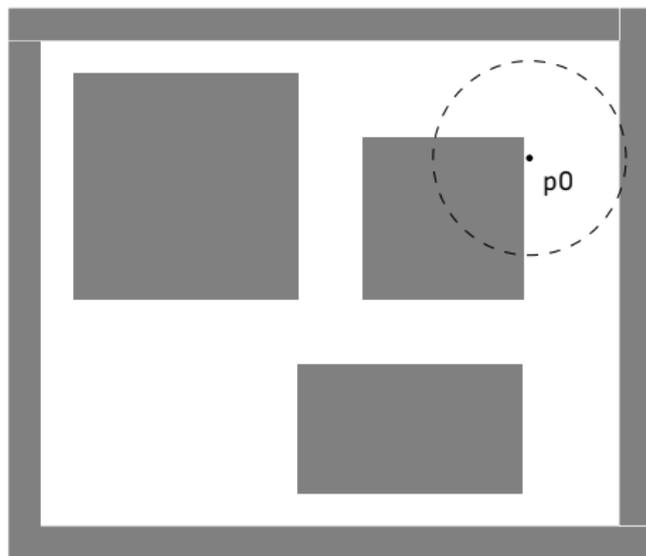
## Paramètres

- ▶ n : nombre de points
- ▶ δ : rayon de connexion

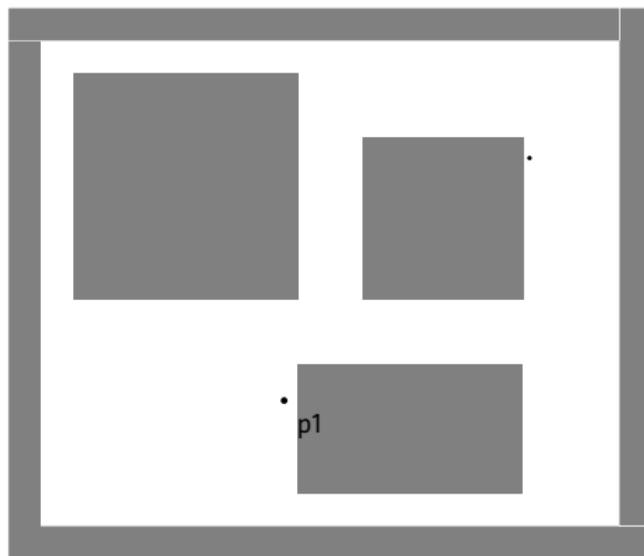
## Exemple de sPRM



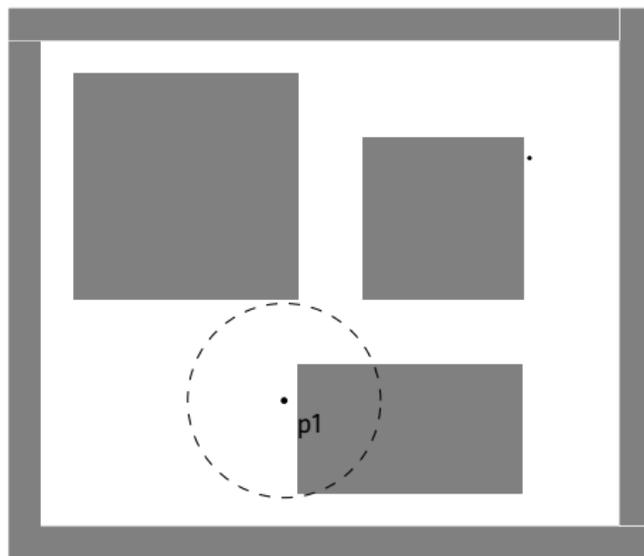
## Exemple de sPRM



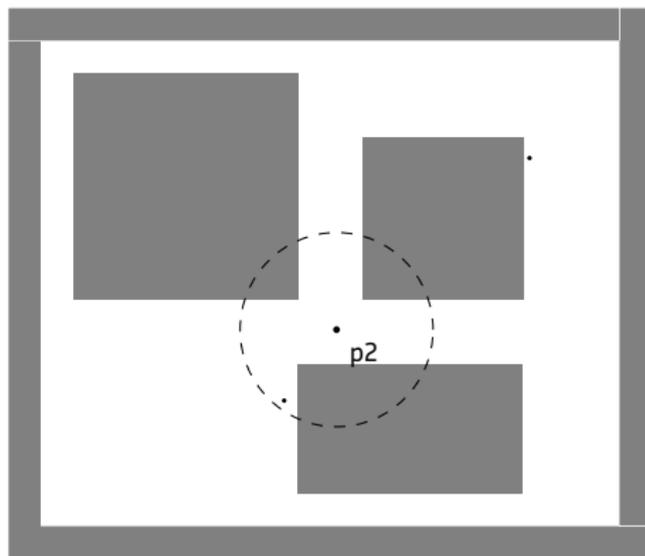
## Exemple de sPRM



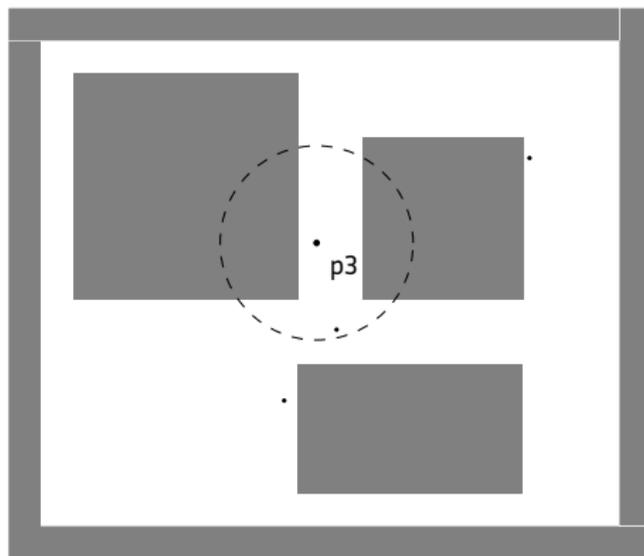
## Exemple de sPRM



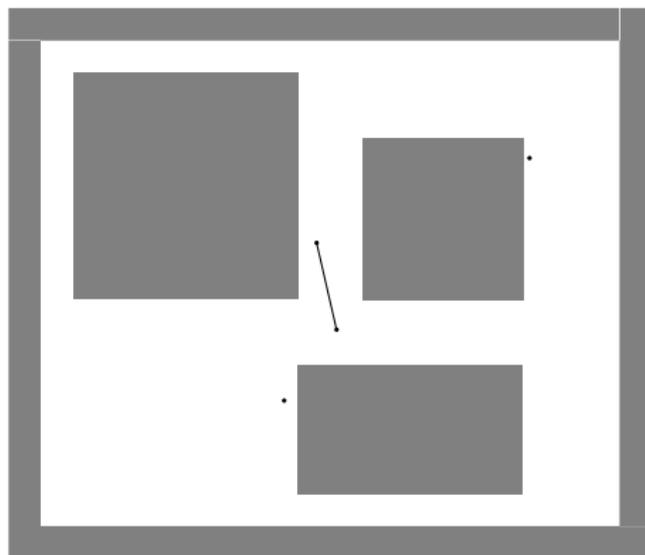
## Exemple de sPRM



## Exemple de sPRM

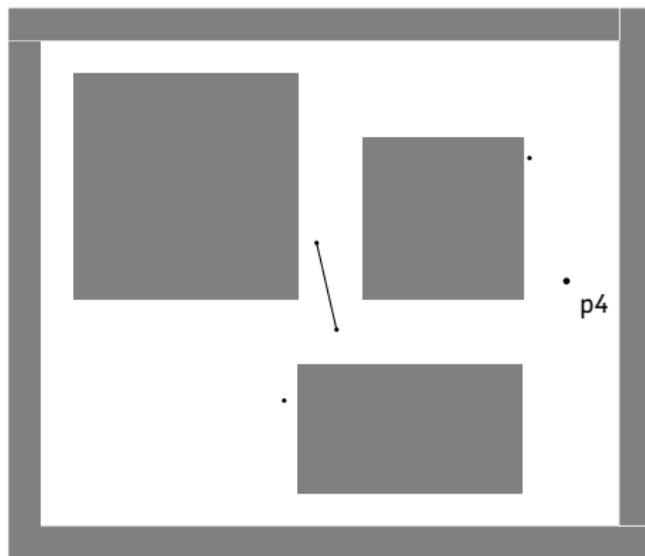


## Exemple de sPRM



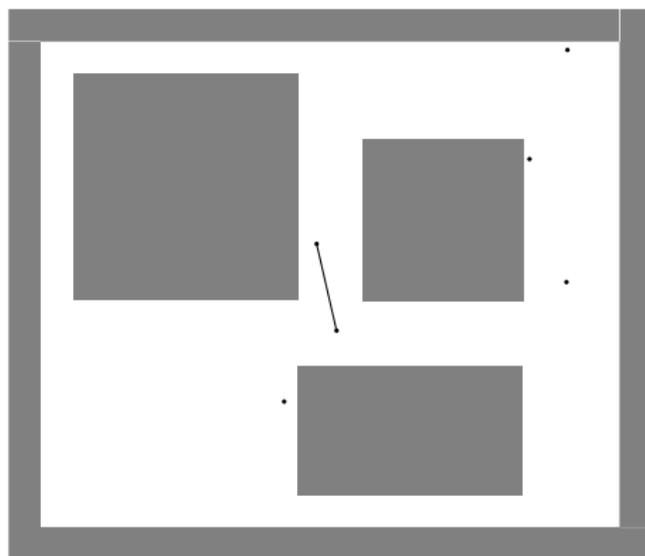
Itération : 4; Nœuds : 4; Arcs : 1

## Exemple de sPRM



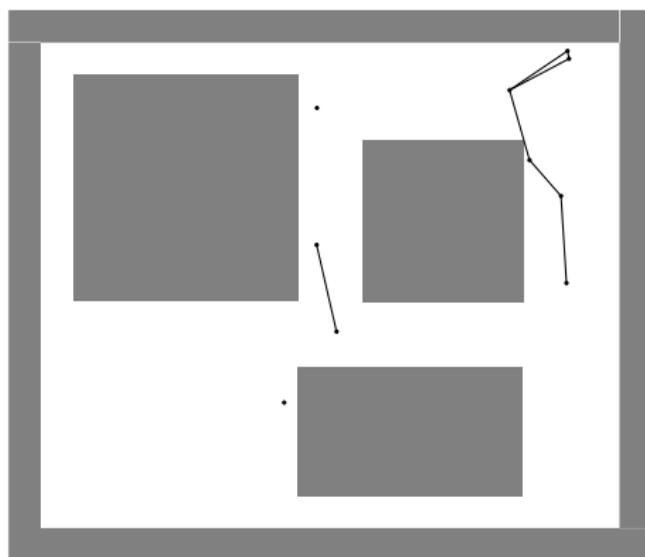


## Exemple de sPRM



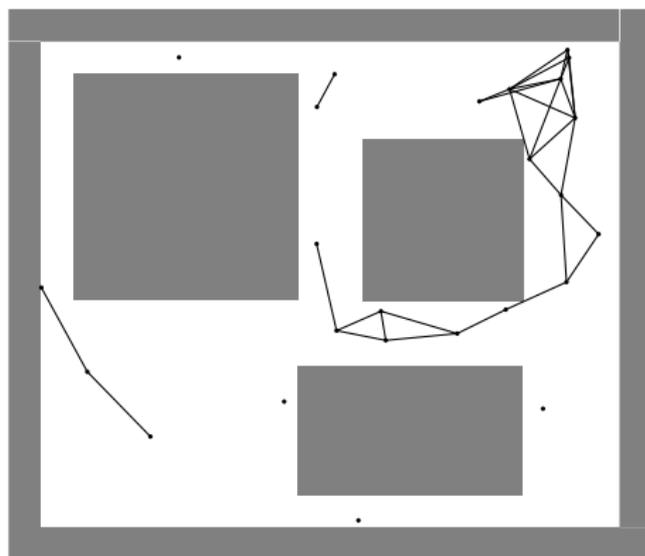
Itération : 6; Nœuds : 6; Arcs : 1

## Exemple de sPRM



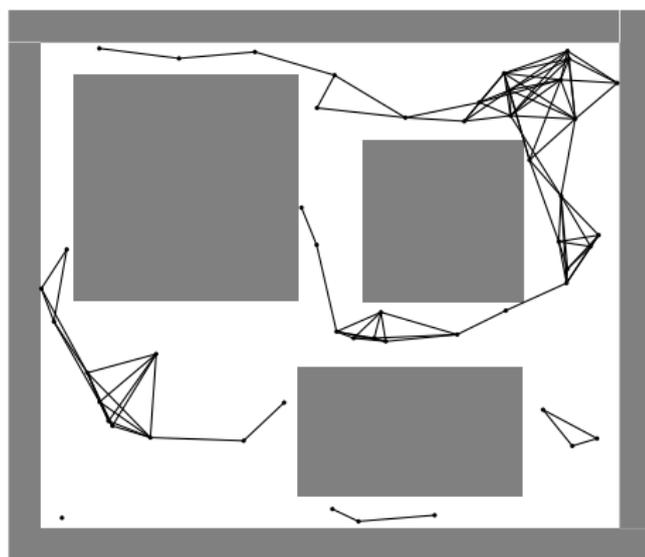
Itération : 10; Nœuds : 10; Arcs : 7

## Exemple de sPRM



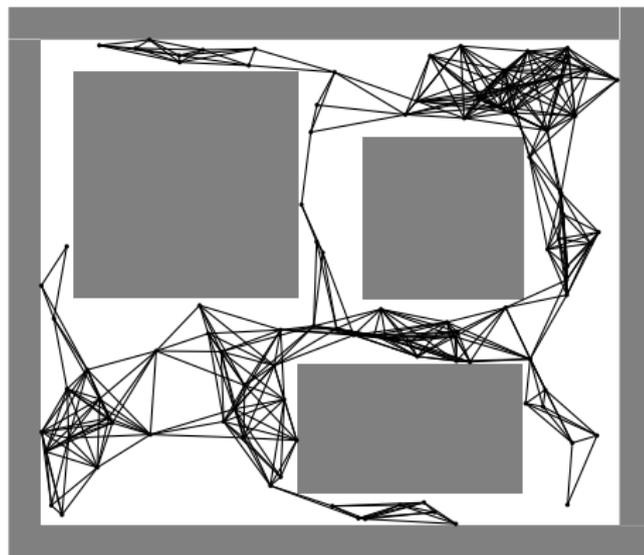
Itération : 25; Nœuds : 25; Arcs : 31

## Exemple de sPRM



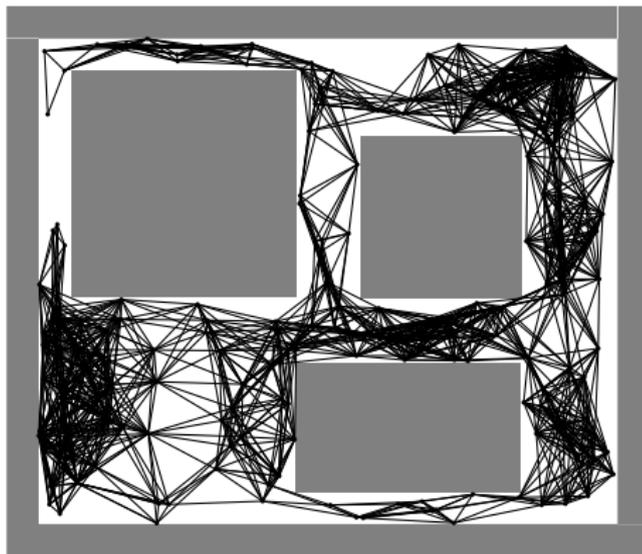
Itération : 50; Nœuds : 50; Arcs : 109

## Exemple de sPRM



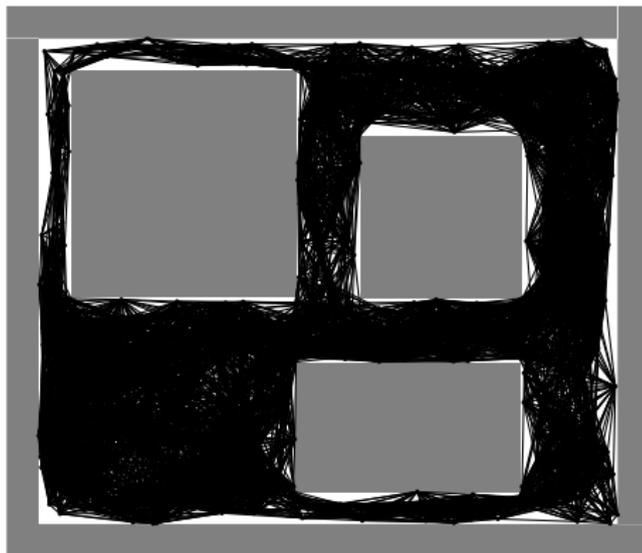
Itération : 100; Nœuds : 100; Arcs : 447

## Exemple de sPRM



Itération : 200; Nœuds : 200; Arcs : 1727

## Exemple de sPRM



Itération : 500; Nœuds : 500; Arcs : 10683

# Algorithme PRM

## PRM

```

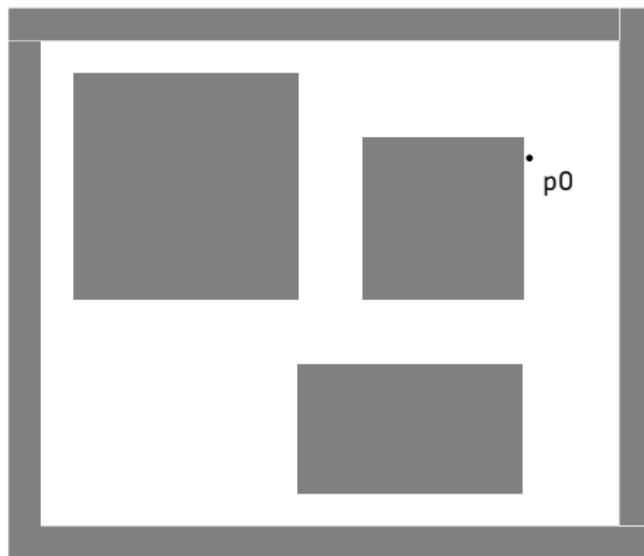
 $V \leftarrow \emptyset; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
     $x_{\text{rand}} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
     $V \leftarrow V \cup \{x_{\text{rand}}\}$ 
     $U \leftarrow \text{Near}(G = (V, E), x_{\text{rand}}, \delta)$ 
    for all  $u \in \text{Sorted}(U, x_{\text{rand}})$  do
        if  $\neg \text{Connected}(x_{\text{rand}}, u)$ 
    then
        if  $\text{CollFree}(x_{\text{rand}}, u)$ 
    then
         $E \leftarrow E \cup \{(x_{\text{rand}}, u)\}$ 
        end if
    end if
    end for
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

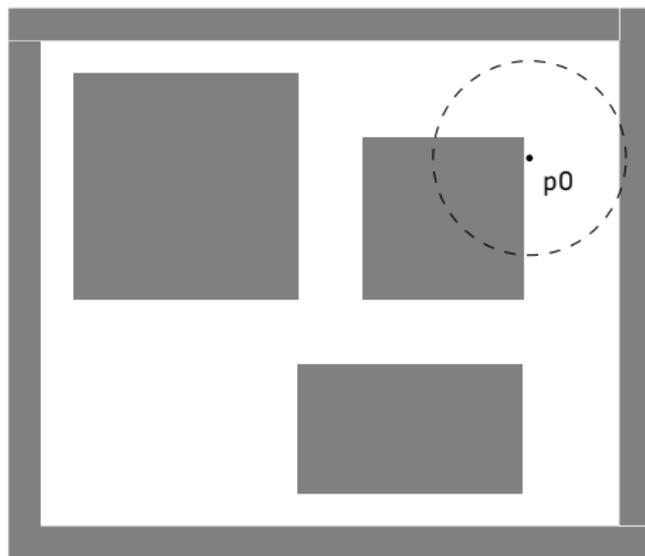
## Fonctions

- ▶ **SampleFree()** : échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ **Near( $G, x, d$ )** : points de  $G$  à une distance de  $x$  inférieure à  $d$
- ▶ **CollFree( $x_1, x_2$ )** : pas d'obstacle entre  $x_1$  et  $x_2$
- ▶ **Sorted( $V, x$ )** : points de  $V$  triés par distance croissante de  $x$
- ▶ **Connected( $x_1, x_2$ )** :  $x_1$  et  $x_2$  dans la même comp. connexe

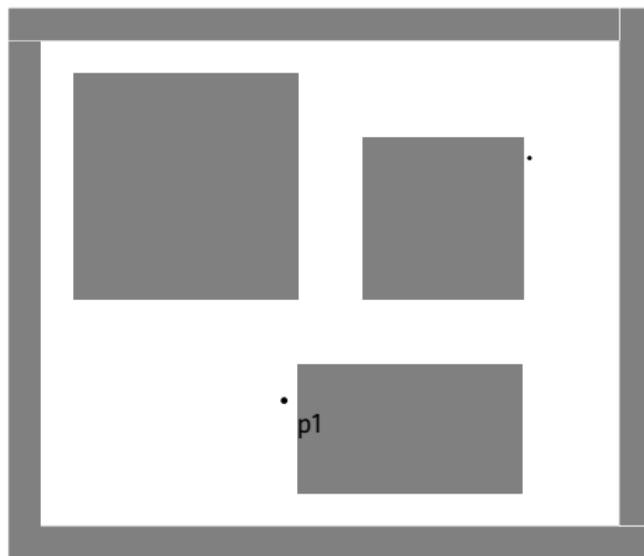
## Exemple de PRM



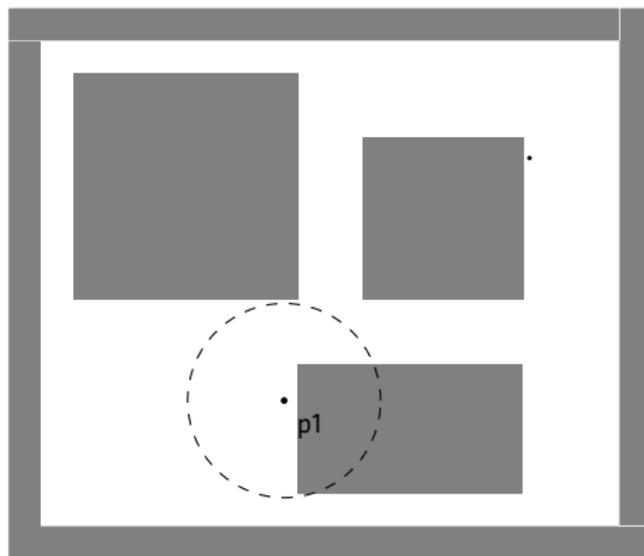
## Exemple de PRM



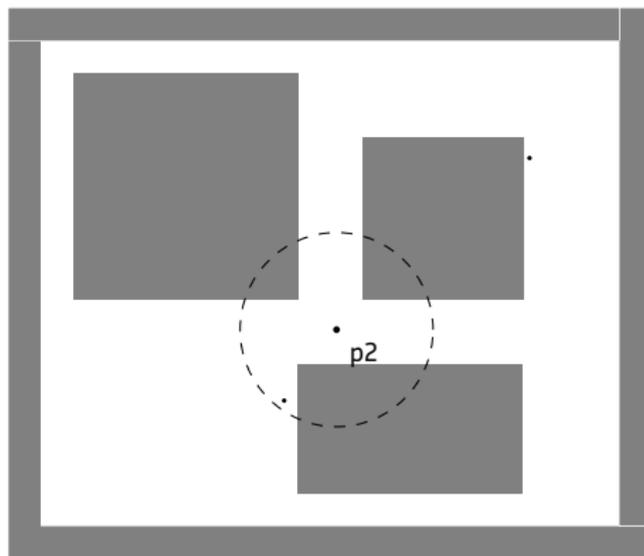
## Exemple de PRM



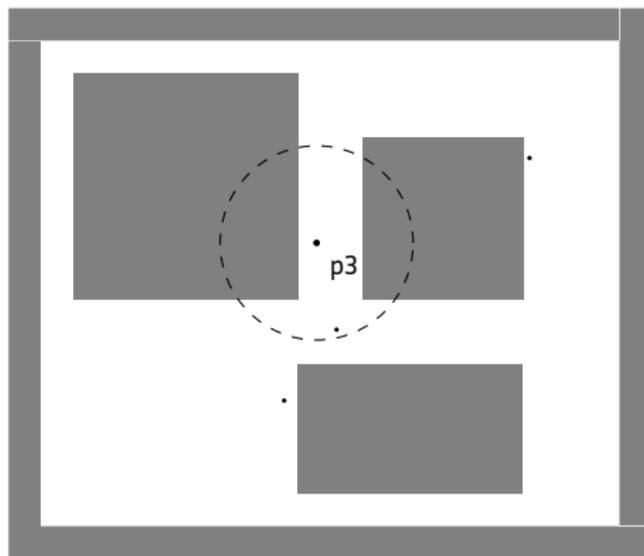
## Exemple de PRM



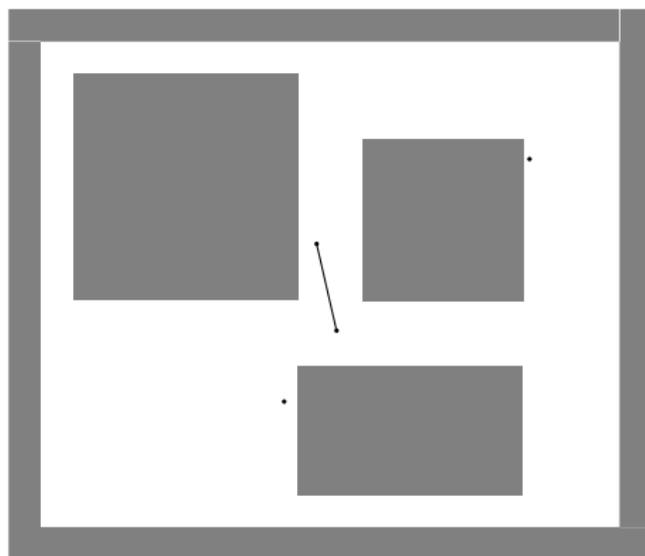
## Exemple de PRM



## Exemple de PRM



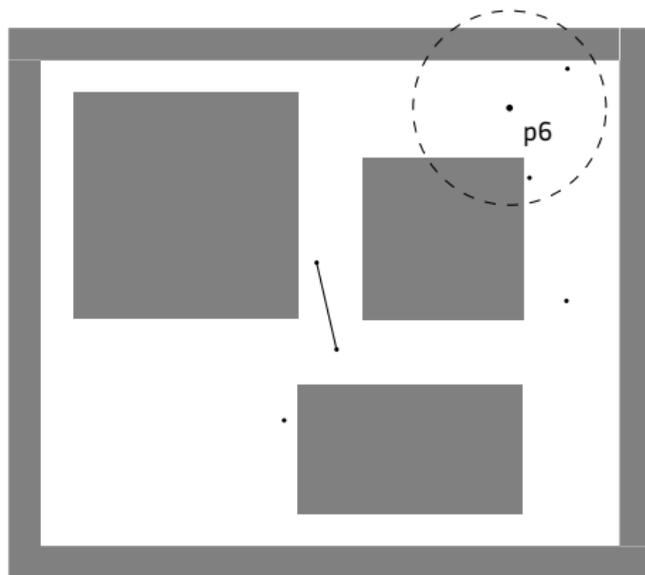
## Exemple de PRM



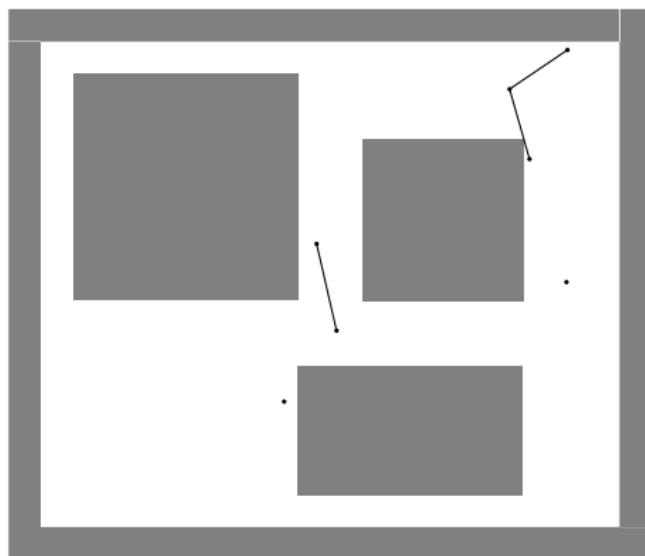
Itération : 4; Nœuds : 4; Arcs : 1



## Exemple de PRM

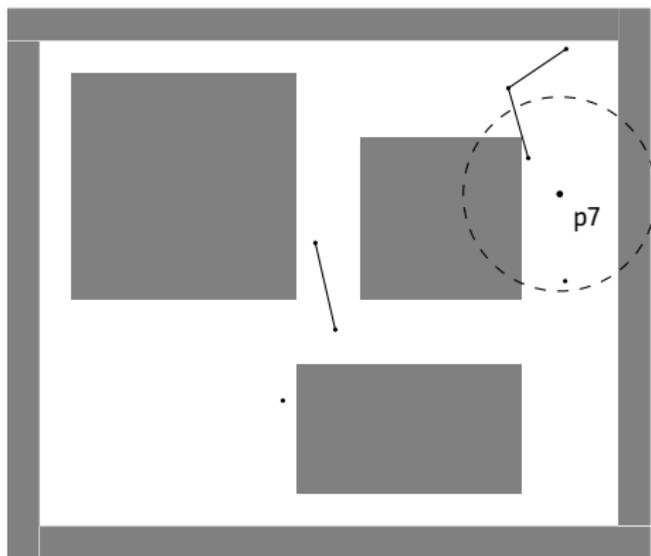


## Exemple de PRM



Itération : 7; Nœuds : 7; Arcs : 3

## Exemple de PRM

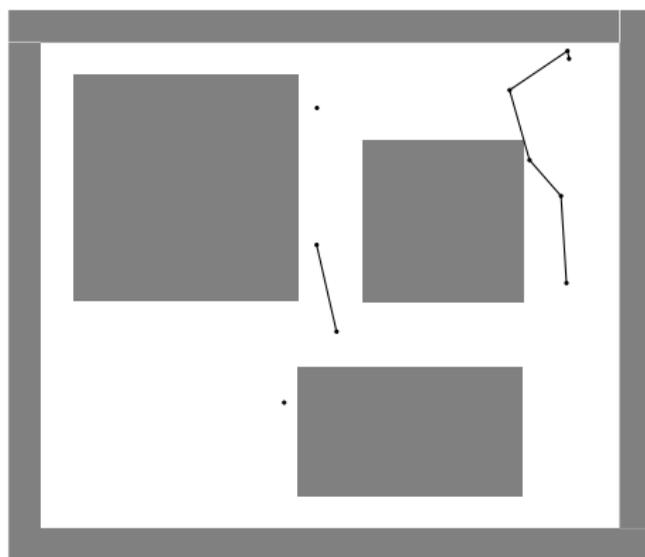






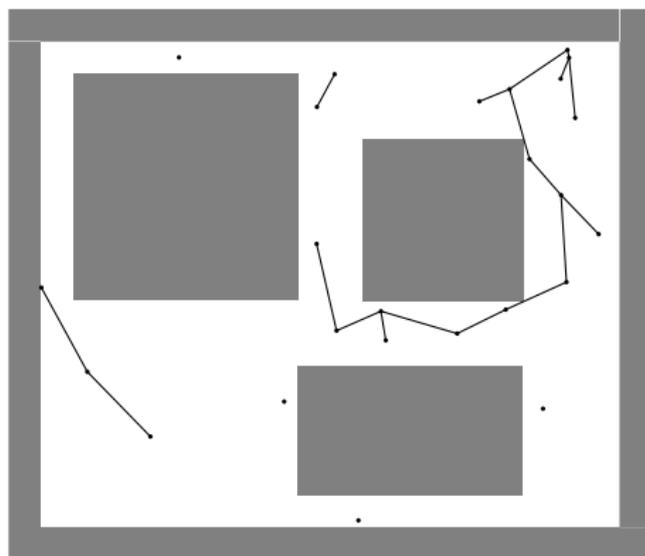


## Exemple de PRM



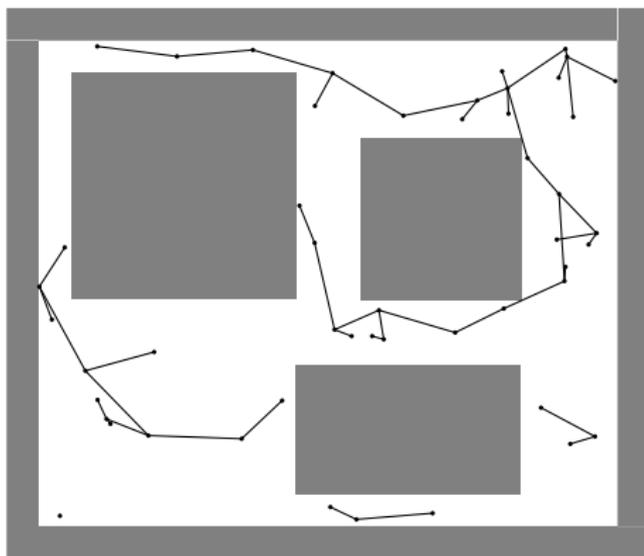
Itération : 10; Nœuds : 10; Arcs : 6

## Exemple de PRM



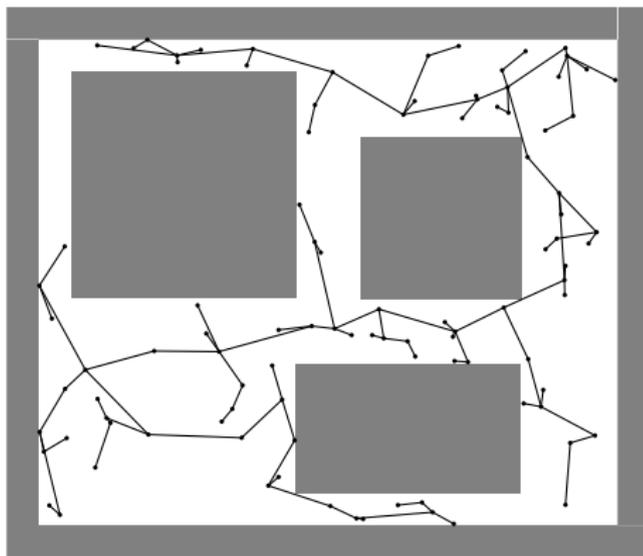
Itération : 25; Nœuds : 25; Arcs : 18

## Exemple de PRM



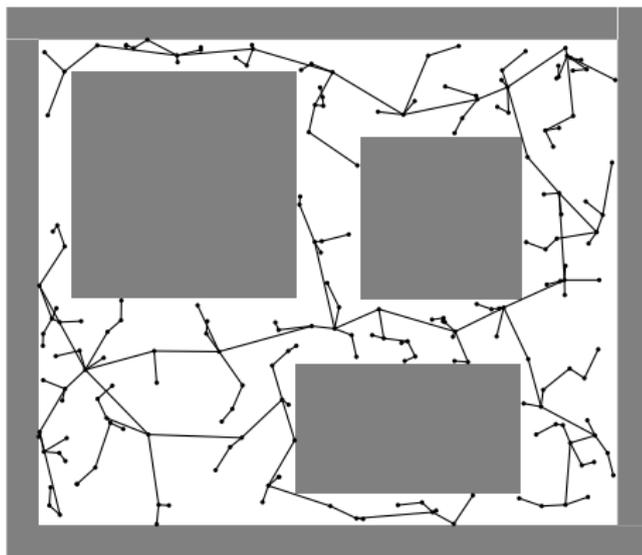
Itération : 50; Nœuds : 50; Arcs : 45

## Exemple de PRM



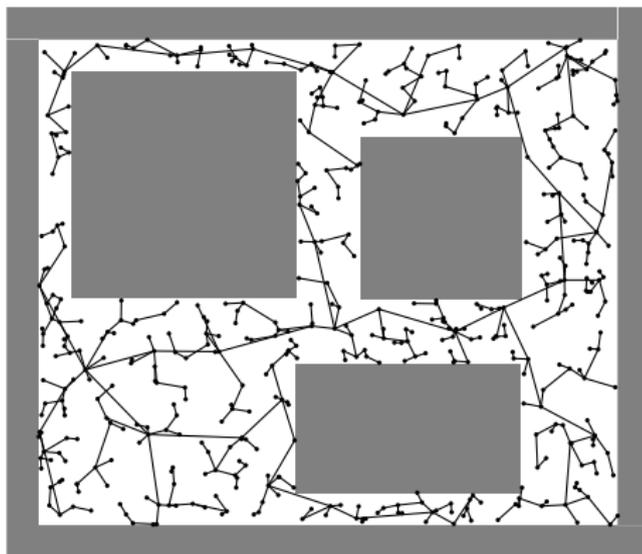
Itération : 100; Nœuds : 100; Arcs : 99

## Exemple de PRM



Itération : 200; Nœuds : 200; Arcs : 199

## Exemple de PRM



Itération : 500; Nœuds : 500; Arcs : 499

## Conclusion sur PRM

### *Probabilistic Roadmaps*

- ▶ deux étapes
  - ▶ création du graphe par échantillonnage
  - ▶ requête par recherche dans un graphe
  - ▶ adapté à des requêtes multiples

### Variantes

- ▶ PRM [Kavraki96]
  - ▶ vérification de connectivité avant collision → création simple
  - ▶ maintien d'une forêt → requête simple
- ▶ sPRM [Kavraki98]
  - ▶ vérification de collision → création complexe
  - ▶ graphe plus complexe → requête complexe
  - ▶ chemin asymptotiquement optimal
  - ▶ incrémental ou batch

# Conclusion sur PRM

## *Probabilistic Roadmaps*

- ▶ deux étapes
  - ▶ création du graphe par échantillonnage
  - ▶ requête par recherche dans un graphe
  - ▶ adapté à des requêtes multiples

## Variantes

- ▶ PRM [Kavraki96]
  - ▶ vérification de connectivité avant collision → création simple
  - ▶ maintien d'une forêt → requête simple
- ▶ sPRM [Kavraki98]
  - ▶ vérification de collision → création complexe
  - ▶ graphe plus complexe → requête complexe
  - ▶ chemin asymptotiquement optimal
  - ▶ incrémental ou batch

# 03

## *Rapidly-exploring Random Trees*

## Rapidly-exploring Random Trees

### PRM

- ▶ création assez lourde : exploration de tout l'espace
- ▶ multiple requêtes
- ▶ environnement connu et assez statique

### RRT

- ▶ requête unique
- ▶ création et planification en ligne
- ▶ exploration à partir du départ
- ▶ croissance par la frontière

# Algorithme RRT

## RRT

```

 $V \leftarrow \{x_{\text{init}}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{\text{rand}} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{\text{nearest}} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{\text{rand}})$ 
   $x_{\text{new}} \leftarrow \text{Steer}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{rand}}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})$  then
     $V \leftarrow V \cup \{x_{\text{new}}\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})\}$ 
  end if
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

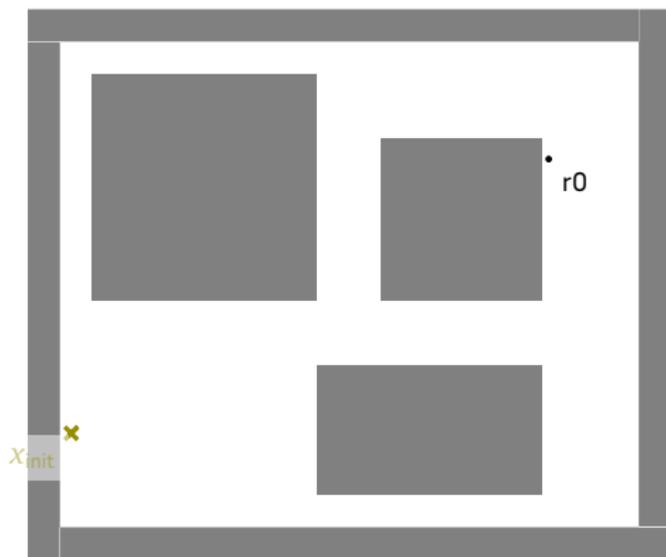
## Fonctions

- ▶  $\text{SampleFree}()$  :  
échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶  $\text{Nearest}(G, x)$  : point le plus proche de  $x$  dans le graphe  $G$
- ▶  $\text{Steer}(x_1, x_2, \eta)$  : point à une distance  $\eta$  de  $x_1$  vers  $x_2$
- ▶  $\text{CollFree}(x_1, x_2)$  : pas d'obstacle entre  $x_1$  et  $x_2$

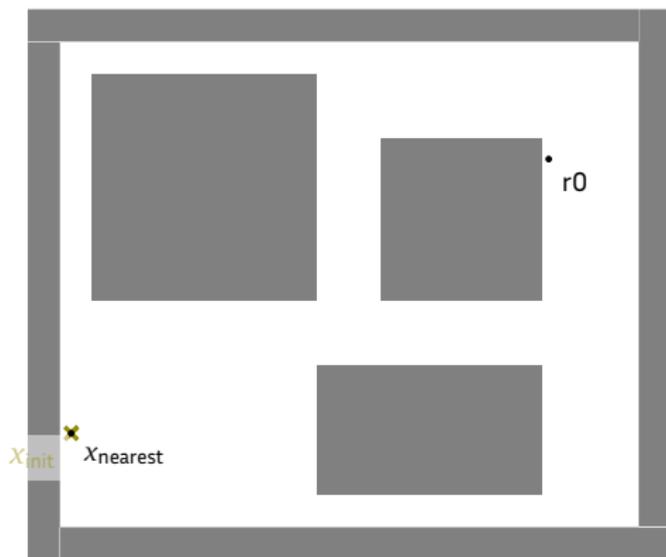
## Paramètres

- ▶  $n$  : nombre de points
- ▶  $\eta$  : distance de croissance

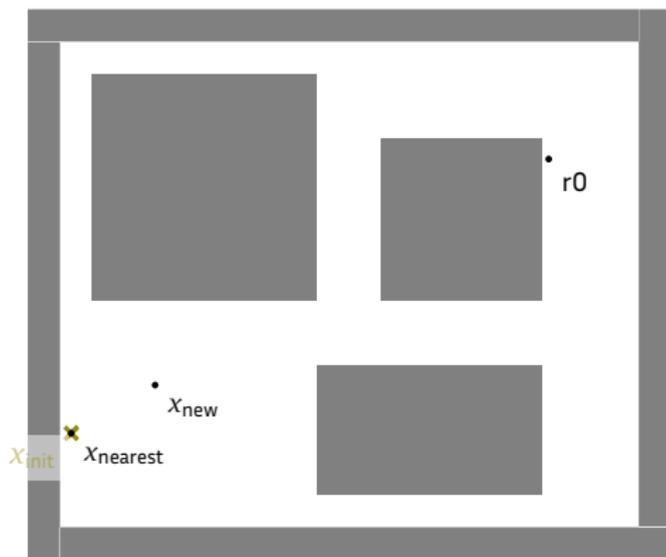
## Exemple RRT



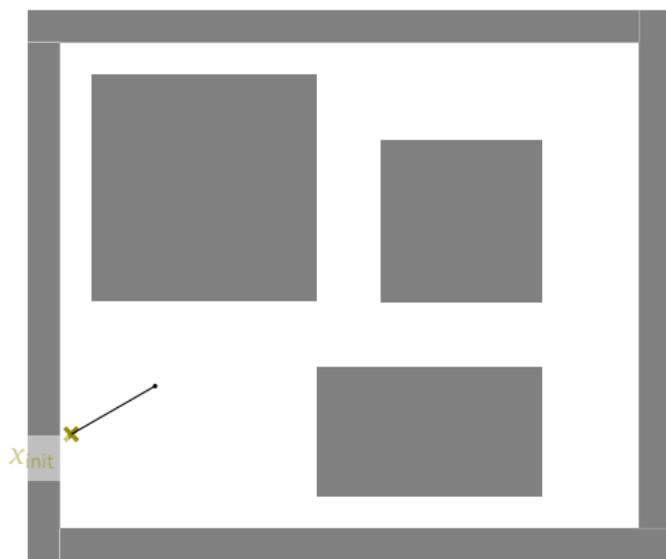
## Exemple RRT



## Exemple RRT

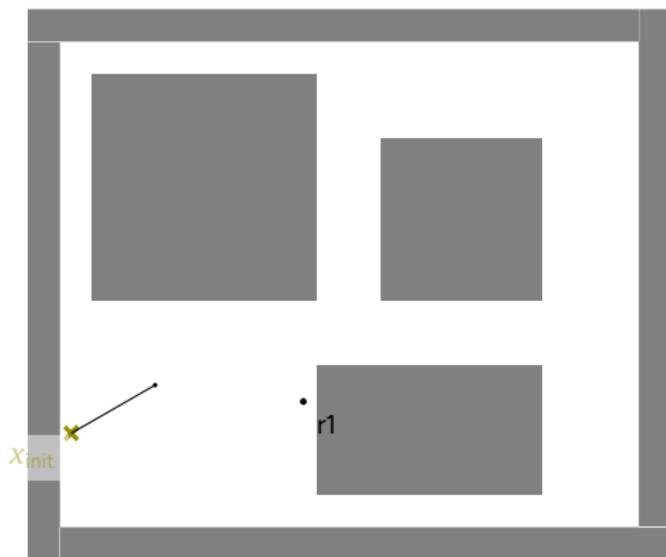


## Exemple RRT

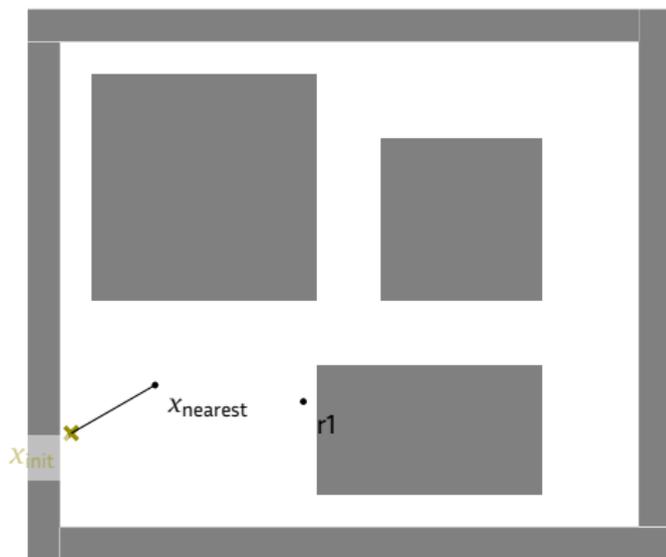


Itération : 1; Nœuds : 2; Arcs : 1

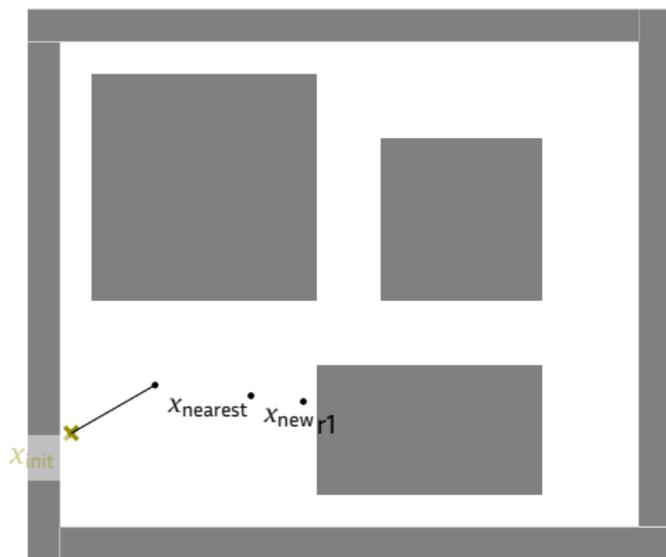
## Exemple RRT



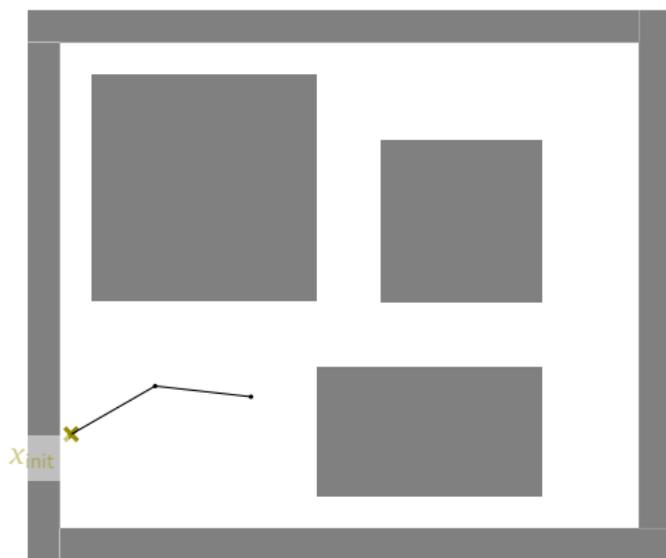
## Exemple RRT



# Exemple RRT

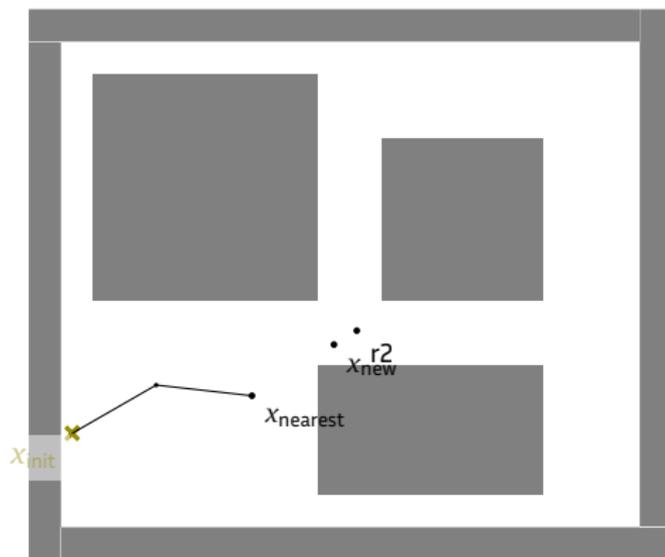


## Exemple RRT

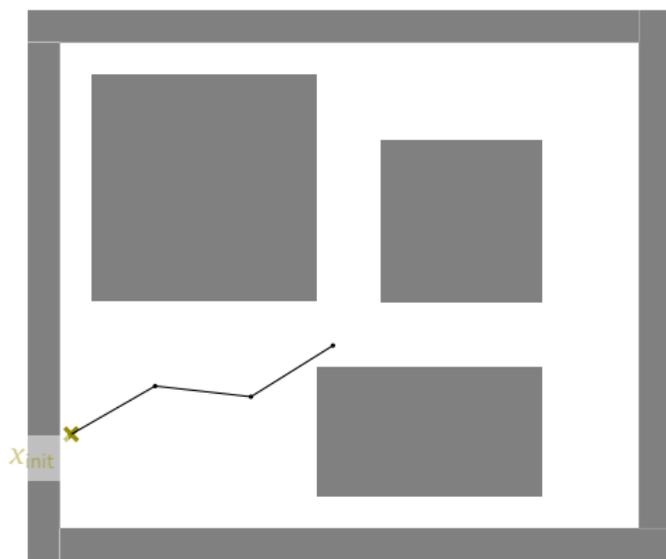


Itération : 2; Nœuds : 3; Arcs : 2

## Exemple RRT

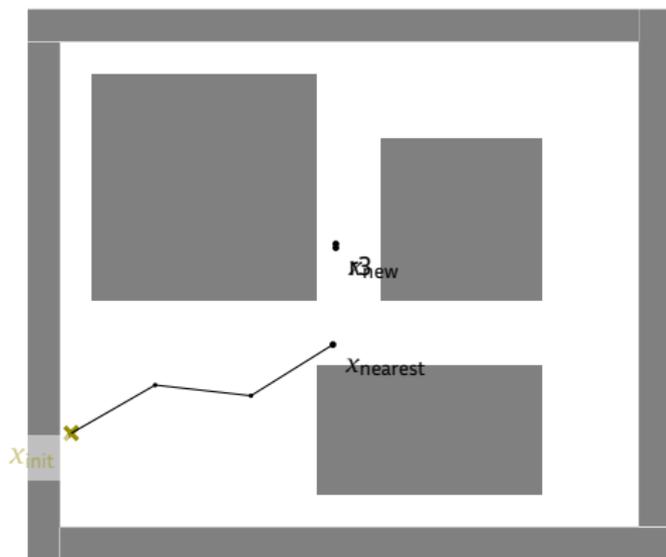


## Exemple RRT

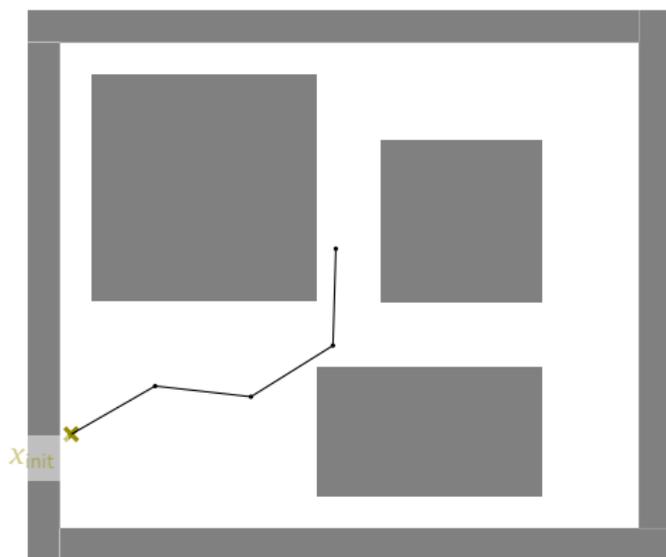


Itération : 3; Nœuds : 4; Arcs : 3

## Exemple RRT

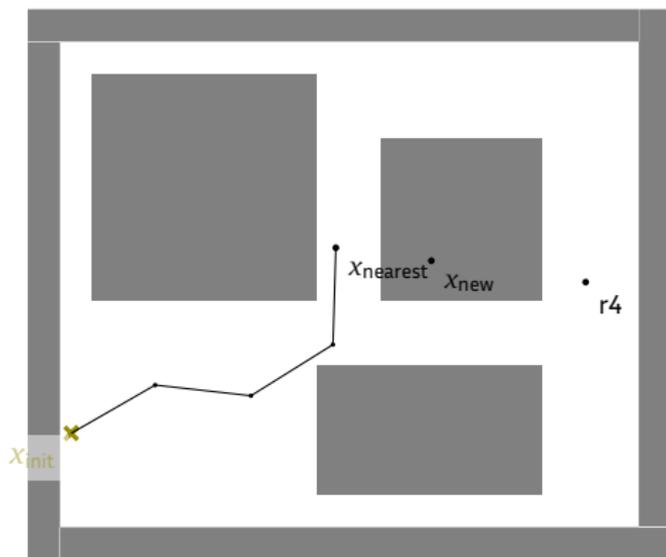


## Exemple RRT

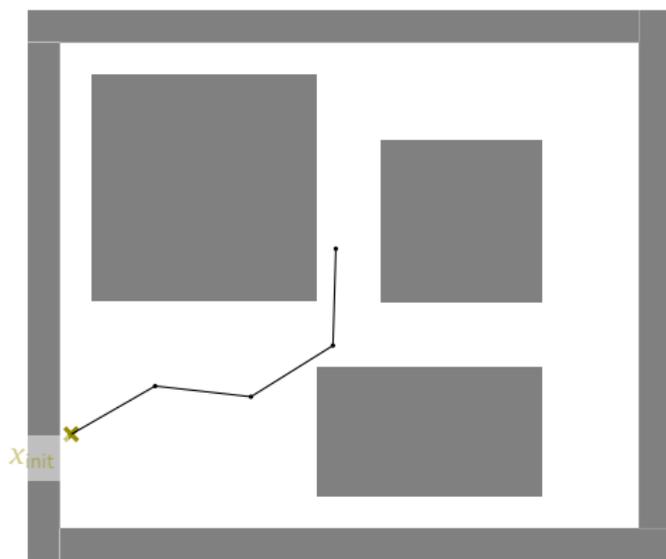


Itération : 4; Nœuds : 5; Arcs : 4

## Exemple RRT

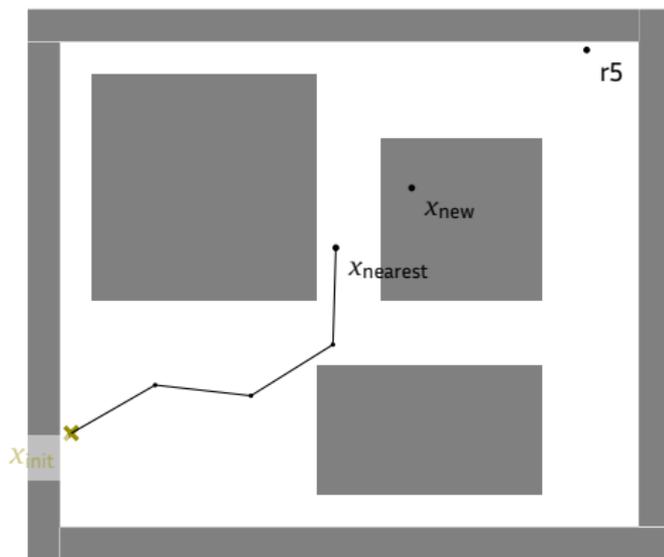


## Exemple RRT

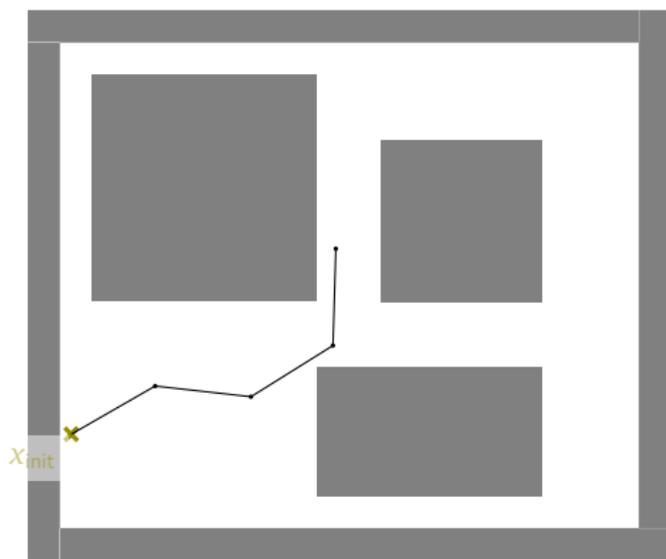


Itération : 5; Nœuds : 5; Arcs : 4

## Exemple RRT

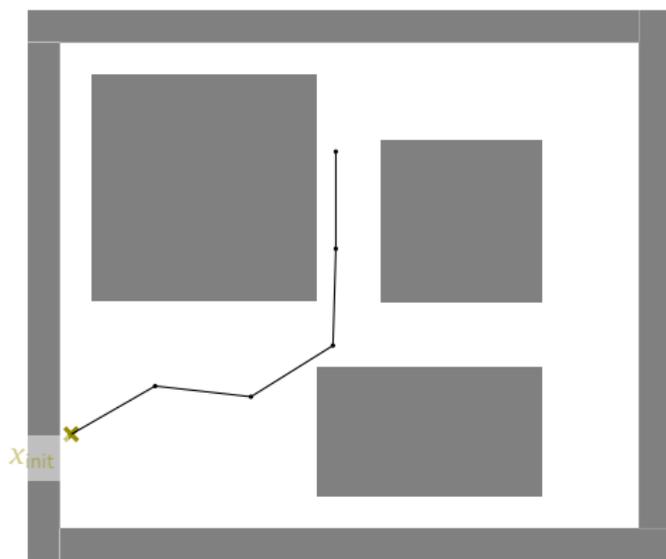


## Exemple RRT



Itération : 6; Nœuds : 5; Arcs : 4

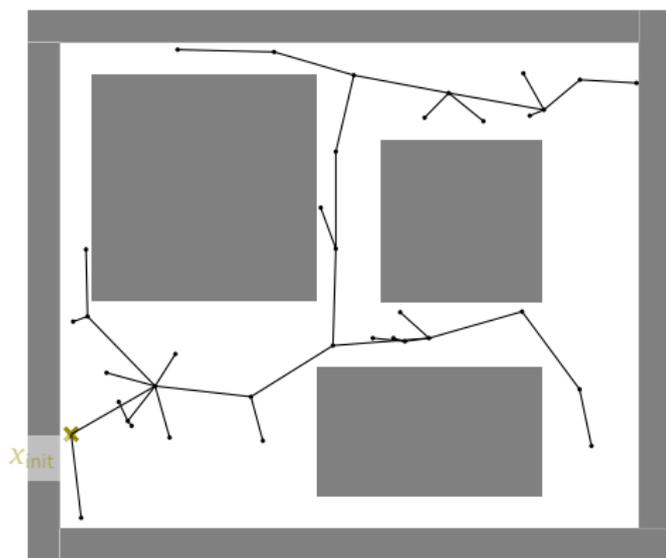
## Exemple RRT



Itération : 10; Nœuds : 6; Arcs : 5

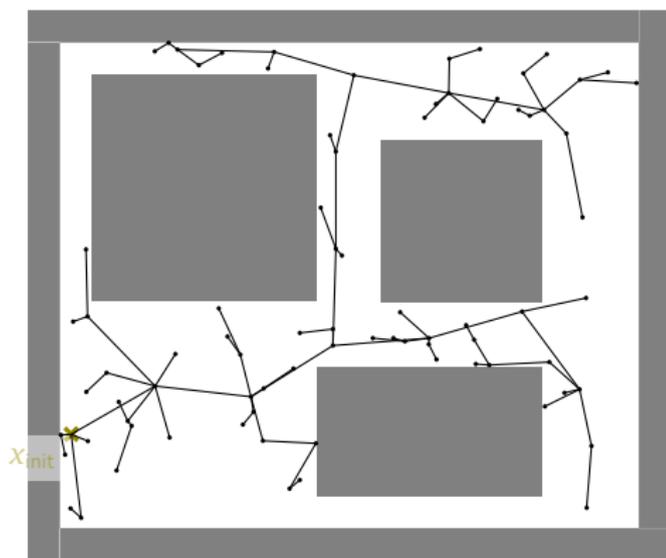


## Exemple RRT



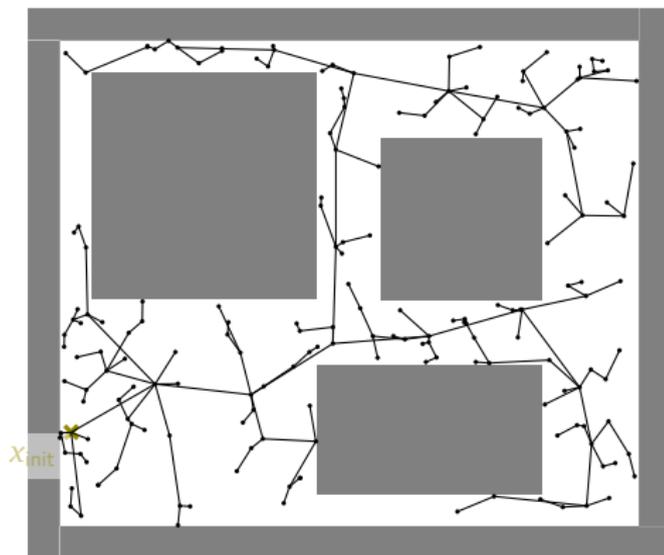
Itération : 50; Nœuds : 37; Arcs : 36

## Exemple RRT



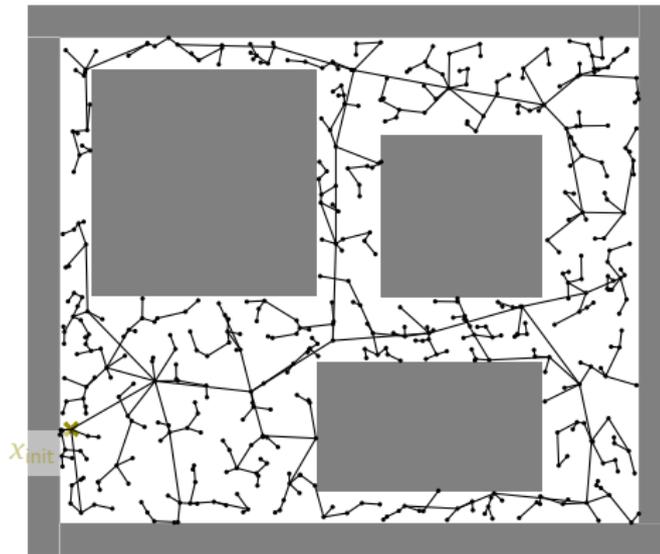
Itération : 100; Nœuds : 82; Arcs : 81

## Exemple RRT



Itération : 200; Nœuds : 181; Arcs : 180

## Exemple RRT



Itération : 500; Nœuds : 480; Arcs : 479

# Améliorer RRT

## RRT

```

 $V \leftarrow \{x_{\text{init}}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{\text{rand}} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{\text{nearest}} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{\text{rand}})$ 
   $x_{\text{new}} \leftarrow \text{Steer}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{rand}}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})$  then
     $V \leftarrow V \cup \{x_{\text{new}}\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})\}$ 
  end if
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

## Fonctions

- ▶ **SampleFree()** :  
échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ **Nearest( $G, x$ )** : point le plus proche de  $x$  dans le graphe  $G$
- ▶ **Steer( $x_1, x_2, \eta$ )** : point à une distance  $\eta$  de  $x_1$  vers  $x_2$
- ▶ **CollFree( $x_1, x_2$ )** : pas d'obstacle entre  $x_1$  et  $x_2$

# Améliorer RRT

## Amélioration de RRT

```

 $V \leftarrow \{x_{init}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{rand} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{nearest} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{rand})$ 
   $x_{new} \leftarrow \text{Steer}(x_{nearest}, x_{rand}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{nearest}, x_{new})$  then
     $x_{near} \leftarrow \text{Near}((V, E), x_{new}, \delta)$ 
     $x_{min} \leftarrow \underset{x \in X_{near}}{\text{arg min}} C(x) + c(x, x_{new})$ 
     $V \leftarrow V \cup \{x_{new}\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(x_{min}, x_{new})\}$ 
  end if
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

## Fonctions

- ▶  $\text{SampleFree}()$  : échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶  $\text{Nearest}(G, x)$  : point le plus proche de  $x$  dans le graphe  $G$
- ▶  $\text{Steer}(x_1, x_2, \eta)$  : point à une distance  $\eta$  de  $x_1$  vers  $x_2$
- ▶  $\text{CollFree}(x_1, x_2)$  : pas d'obstacle entre  $x_1$  et  $x_2$
- ▶  $\text{Near}(G, x, d)$  : points de  $G$  à une distance de  $x$  inférieure à  $d$
- ▶  $C(x)$  : cout entre  $x_{init}$  et  $x$  en remontant le graphe
- ▶  $c(x_1, x_2)$  : cout entre  $x_1$  et  $x_2$

# Algorithme RRT\*

## RRT\*

```

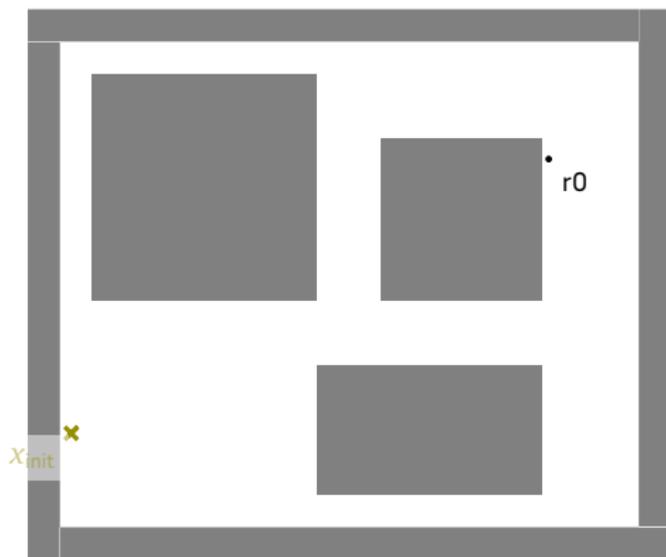
 $V \leftarrow \{x_{init}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{rand} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{nearest} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{rand})$ 
   $x_{new} \leftarrow \text{Steer}(x_{nearest}, x_{rand}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{nearest}, x_{new})$  then
     $X_{near} \leftarrow \text{Near}((V, E), x_{new}, \delta)$ 
     $x_{min} \leftarrow \arg \min_{x \in X_{near}} C(x) + c(x, x_{new})$ 
     $V \leftarrow V \cup \{x_{new}\}; E \leftarrow E \cup \{(x_{min}, x_{new})\}$ 
    for all  $x \in X_{near}$  do
      if  $C(x_{new}) + c(x_{new}, x) < C(x)$  then
         $E \leftarrow E \setminus \{(P(x), x)\}$ 
         $E \leftarrow E \cup \{(x_{new}, x)\}$ 
      end if
    end for
  end if
end for
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

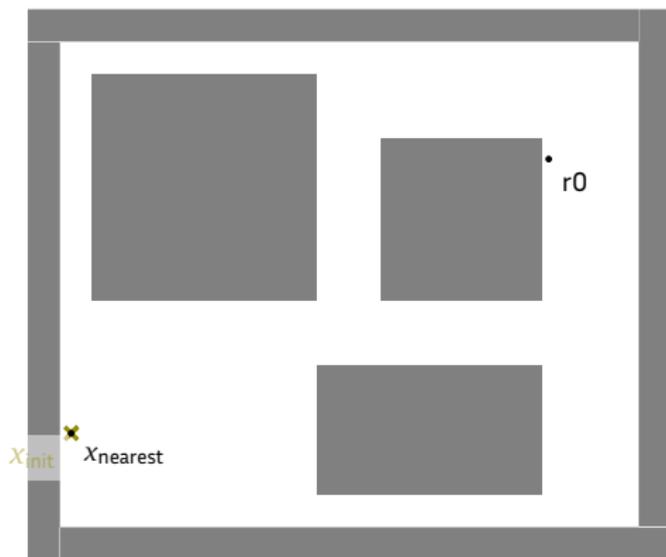
## Fonctions

- ▶  $\text{SampleFree}()$  : échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶  $\text{Nearest}(G, x)$  : point le plus proche de  $x$  dans le graphe  $G$
- ▶  $\text{Steer}(x_1, x_2, \eta)$  : point à une distance  $\eta$  de  $x_1$  vers  $x_2$
- ▶  $\text{CollFree}(x_1, x_2)$  : pas d'obstacle entre  $x_1$  et  $x_2$
- ▶  $\text{Near}(G, x, d)$  : points de  $G$  à une distance de  $x$  inférieure à  $d$
- ▶  $C(x)$  : cout entre  $x_{init}$  et  $x$  en remontant le graphe
- ▶  $c(x_1, x_2)$  : cout entre  $x_1$  et  $x_2$
- ▶  $P(x)$  : parent de  $x$

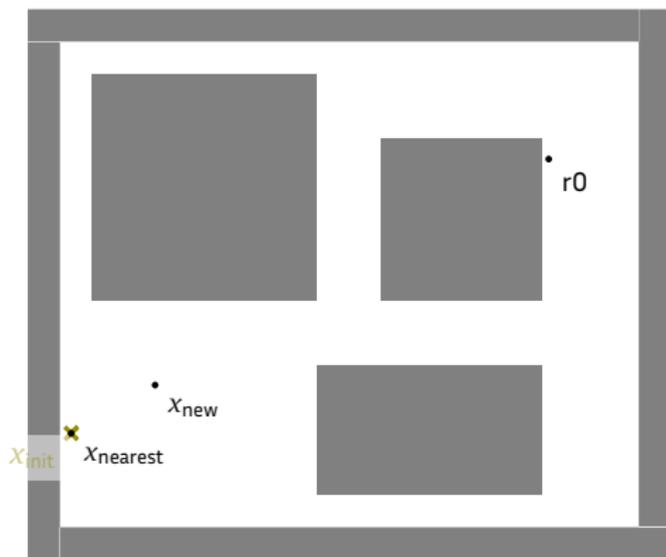
## Exemple RRT\*



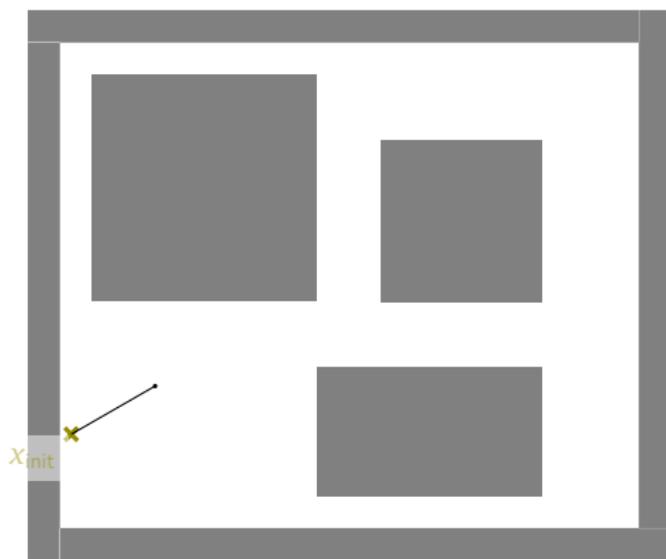
## Exemple RRT\*



## Exemple RRT\*

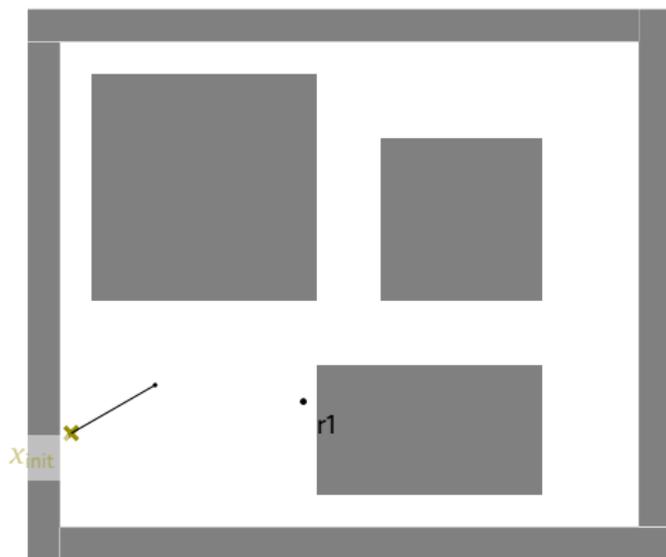


## Exemple RRT\*

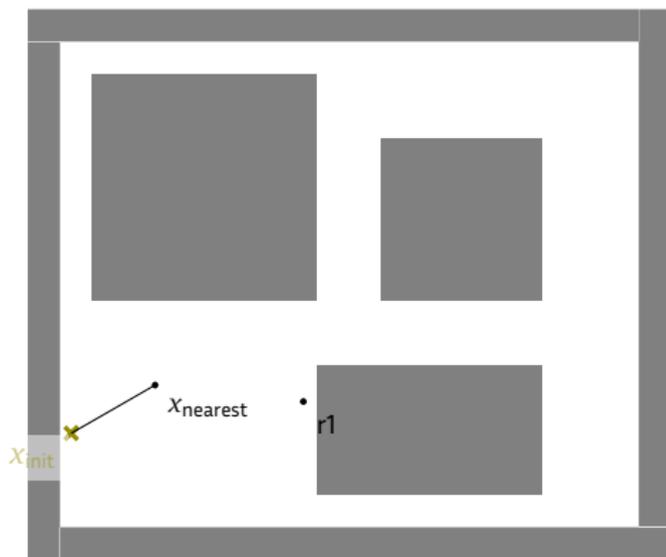


Itération : 1; Nœuds : 2; Arcs : 1

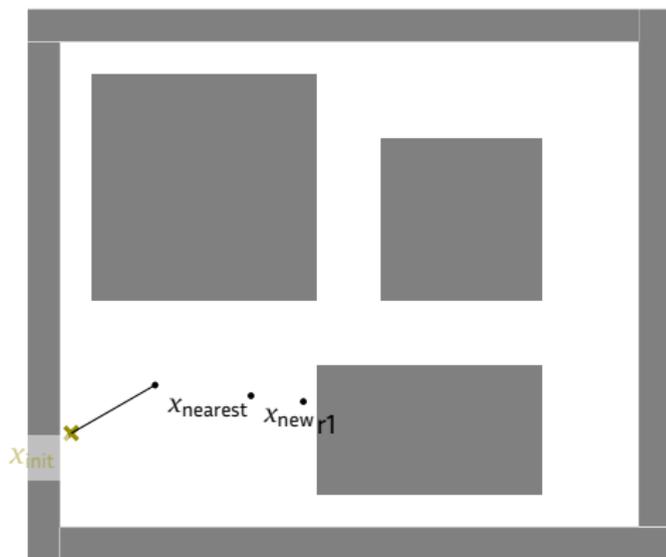
## Exemple RRT\*



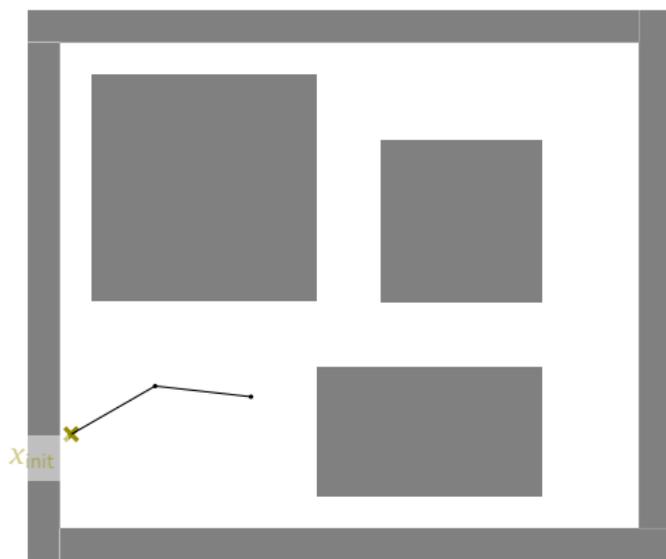
## Exemple RRT\*



## Exemple RRT\*

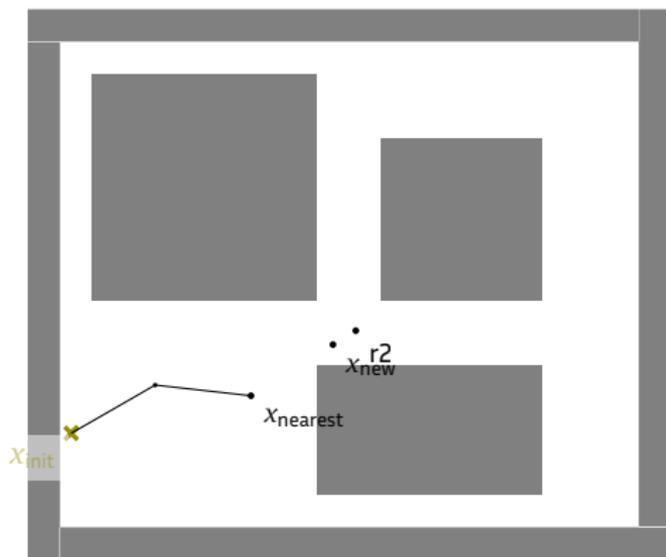


## Exemple RRT\*

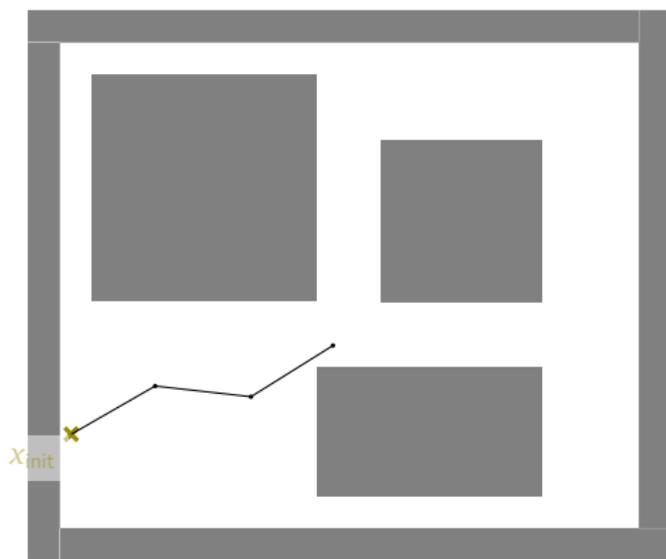


Itération : 2; Nœuds : 3; Arcs : 2

## Exemple RRT\*

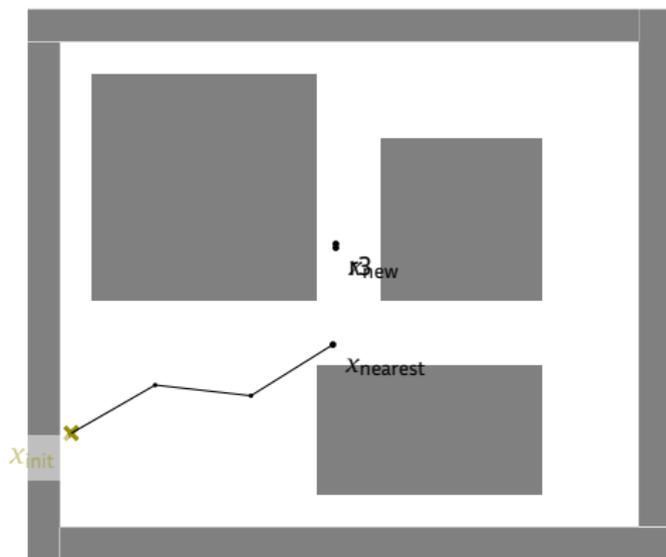


## Exemple RRT\*

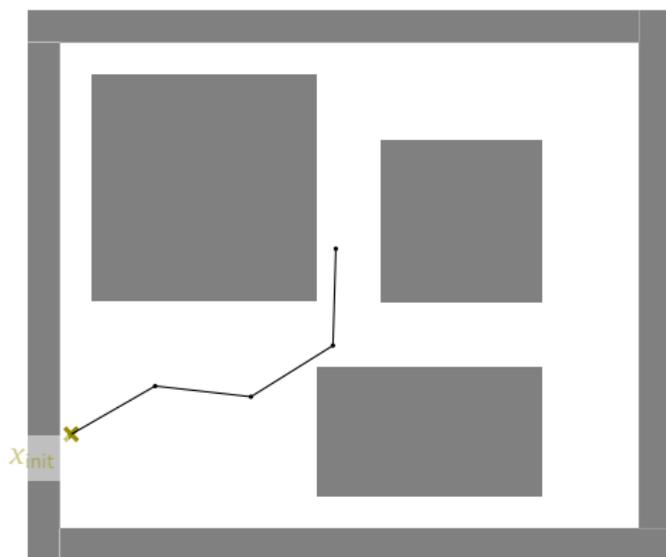


Itération : 3; Nœuds : 4; Arcs : 3

## Exemple RRT\*

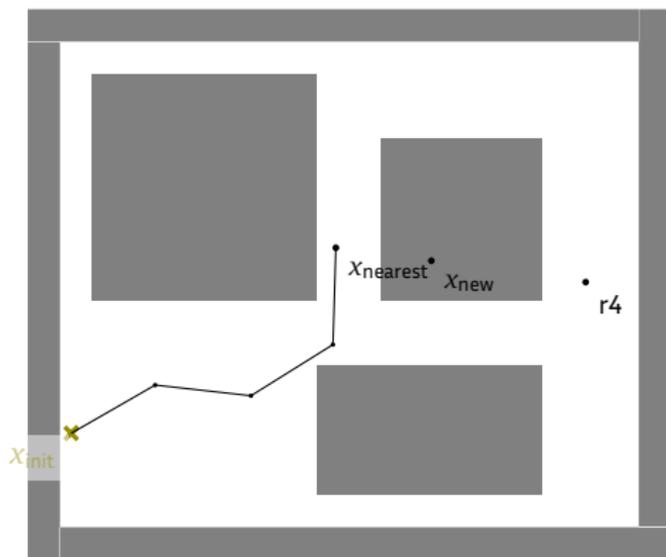


## Exemple RRT\*

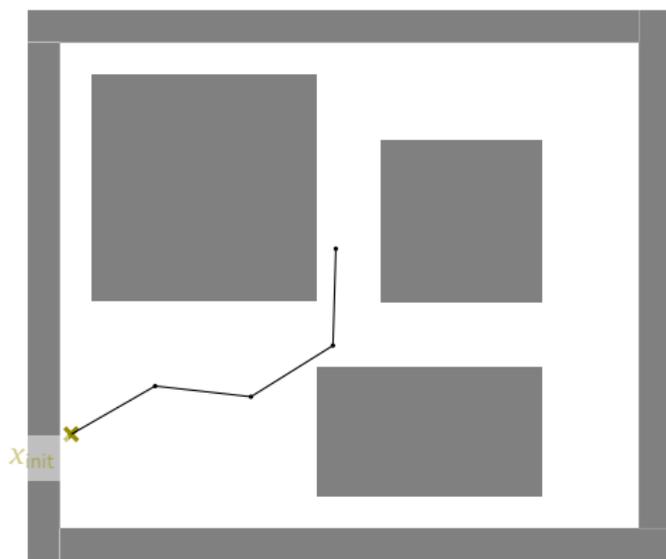


Itération : 4; Nœuds : 5; Arcs : 4

## Exemple RRT\*

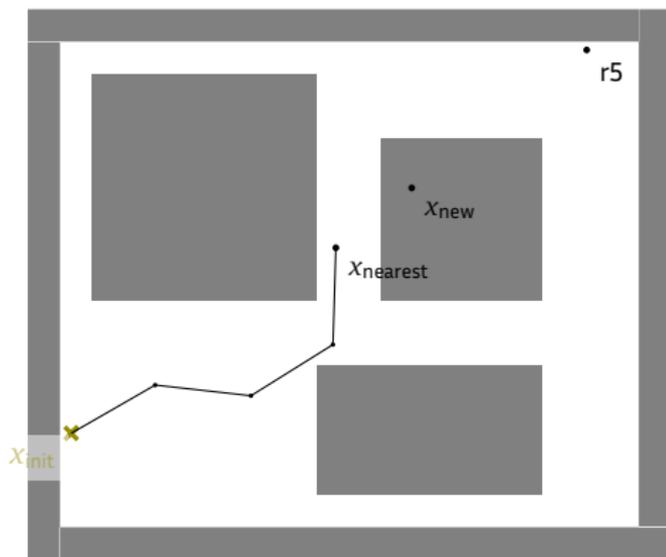


## Exemple RRT\*

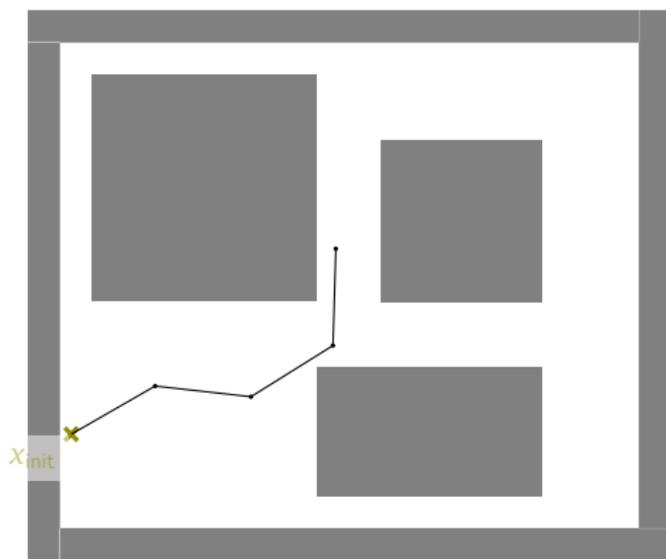


Itération : 5; Nœuds : 5; Arcs : 4

## Exemple RRT\*

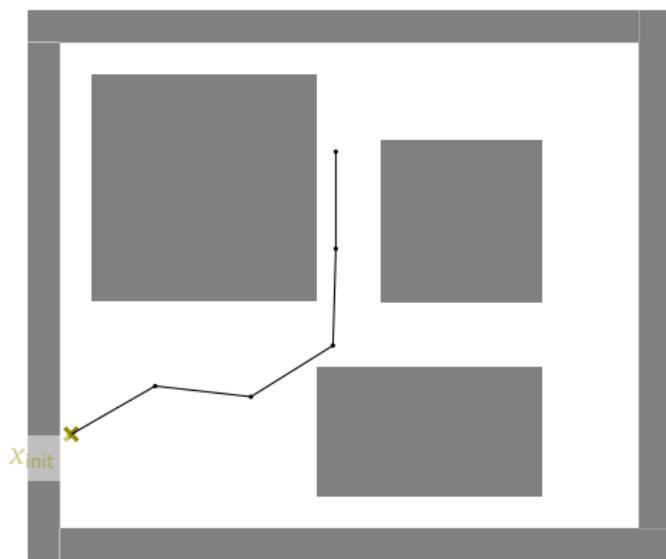


## Exemple RRT\*



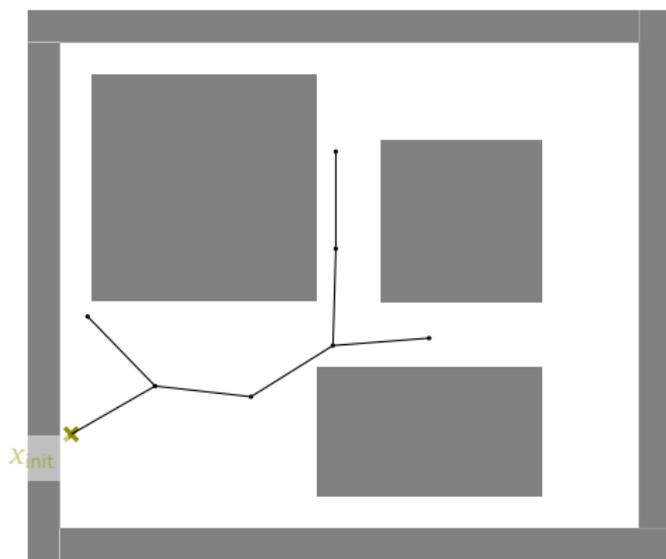
Itération : 6; Nœuds : 5; Arcs : 4

## Exemple RRT\*



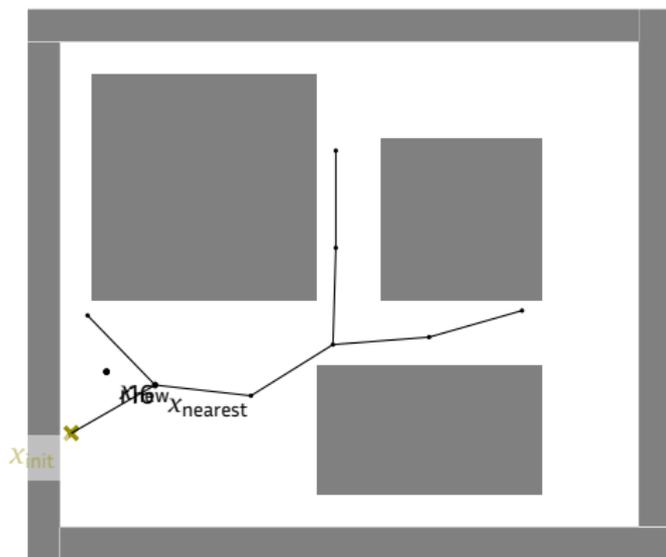
Itération : 10; Nœuds : 6; Arcs : 5

## Exemple RRT\*

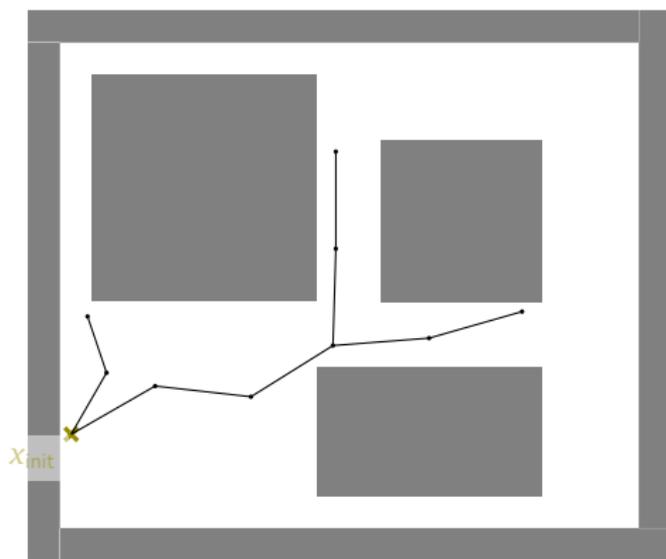


Itération : 15; Nœuds : 8; Arcs : 7

## Exemple RRT\*



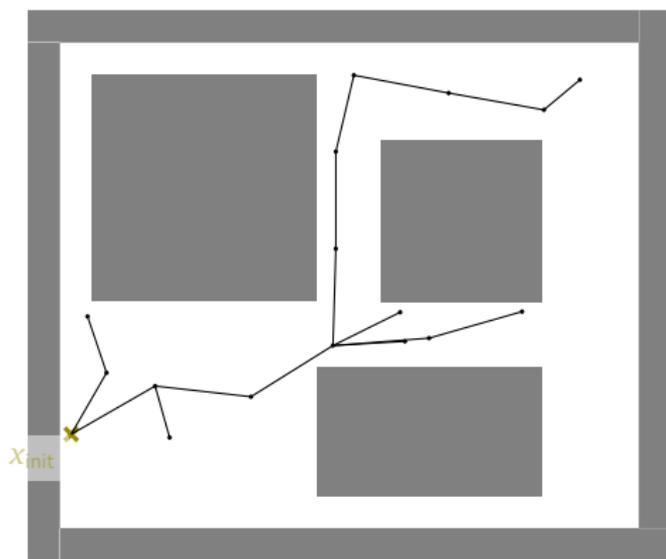
## Exemple RRT\*



Itération : 17; Nœuds : 10; Arcs : 9

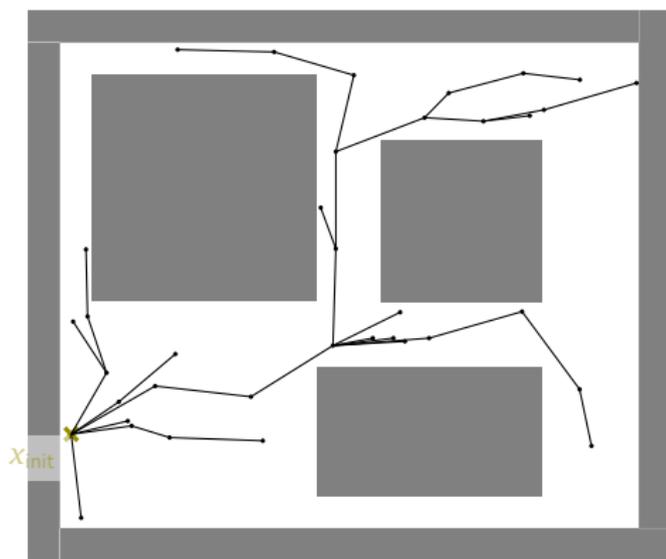


## Exemple RRT\*



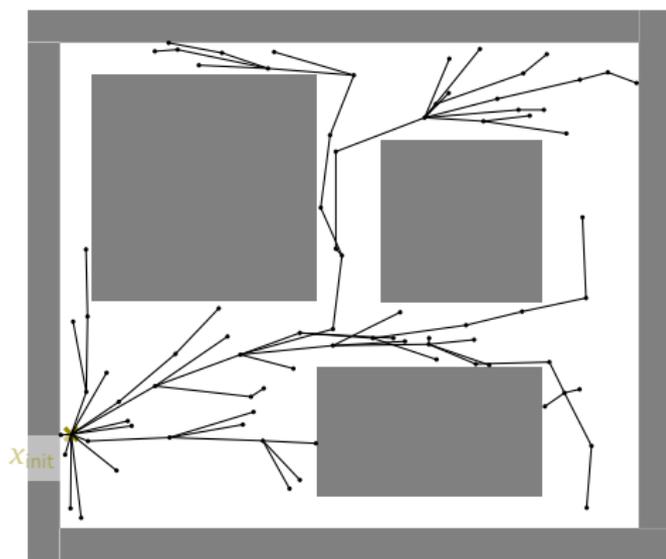
Itération : 25; Nœuds : 17; Arcs : 16

## Exemple RRT\*



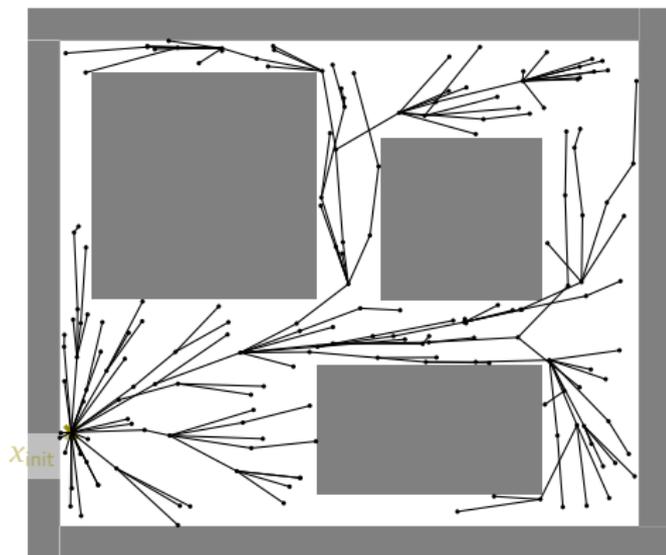
Itération : 50; Nœuds : 37; Arcs : 36

## Exemple RRT\*



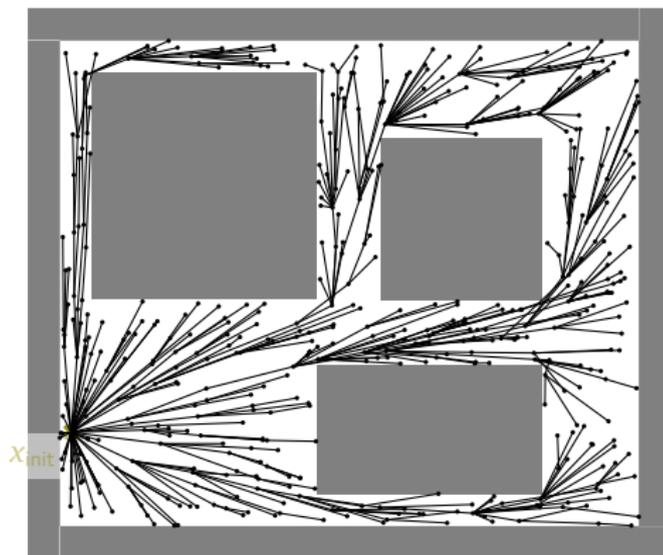
Itération : 100; Nœuds : 82; Arcs : 81

## Exemple RRT\*



Itération : 200; Nœuds : 181; Arcs : 180

## Exemple RRT\*



Itération : 500; Nœuds : 480; Arcs : 479

## Conclusion sur RRT

### RRT [Kuffner00]

- ▶ simple
- ▶ chemin en remontant depuis le but

### RRT\* [Karaman11]

- ▶ recâblage
- ▶ chemin asymptotiquement optimal
- ▶ définition optimale du rayon de recherche  $\delta$
- ▶ variante RRG\* multi-requête

04

Conclusion

# Conclusion

## Planification par échantillonnage

- ▶ mono ou multi requête
- ▶ échantillonnage pour créer un graphe ou un arbre

## PRM

- ▶ rapide (forêt) mais pas optimal

## sPRM

- ▶ construction d'un graphe dense

## RRT\*

- ▶ planification en ligne, *any time*
- ▶ recâblage (*rewiring*) pour optimalité

# Bibliographie

## Livres

- ▶ Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers 1991.
- ▶ Lavelle, *Planning Algorithms*, Cambridge University Press 2006.
- ▶ Siciliano et al., *Springer Handbook of Robotics*, Springer 2016.

## RRT\*, PRM\*, etc.

- ▶ Karaman and Frazzoli, *Sampling-based algorithms for optimal motion planning*, IJRR 2011.

## Conclusion générale

### Cartes

- ▶ plusieurs types de cartes

### Espace de configuration

- ▶ espace libre de collision
- ▶ représentation adaptée à la planification

### Planification

- ▶ création d'un graphe
  - ▶ décomposition de l'espace
  - ▶ visibilité
  - ▶ échantillonnage
- ▶ recherche dans le graphe



Merci de votre attention  
Des questions?