



Planification stochastique

Modèles d'environnement, planification de trajectoires

Francis Colas

15 décembre 2022

01

Introduction

Introduction

Carte

- ▶ diversité de représentation
- ▶ indépendante du robot

Espace de configuration

- ▶ espace continu
- ▶ espace libre de collision

Algorithme de recherche

- ▶ entrée : arbre ou graphe
- ▶ sortie : chemin le plus court

Problème

- ▶ définition d'un graphe ou un arbre?

Introduction

Problème

- ▶ définition d'un graphe ou un arbre?

Approches

- ▶ décomposition de l'espace (semaine dernière)
- ▶ résolution géométrique (semaine dernière)
- ▶ échantillonnage

02

Probabilistic Roadmaps

Probabilistic Roadmaps (PRM)

Principe

- ▶ création d'un graphe dans l'espace libre
 - ▶ échantillonner l'espace libre
 - ▶ relier les échantillons proches
- ▶ requête avec un départ et une arrivée
 - ▶ les relier au graphe
 - ▶ recherche de plus court chemin

Questions

- ▶ stratégie d'échantillonnage
- ▶ vérification de collision
- ▶ stratégie de connexion

Algorithme sPRM

simplified PRM

```

V ← ∅; E ← ∅
for i = 1, ..., n do
  xrand ← SampleFree()
  V ← V ∪ {xrand}
  U ← Near(G = (V, E), xrand, δ)
  for all u ∈ U do
    if CollFree(xrand, u) then
      E ← E ∪ {{xrand, u}}
    end if
  end for
end for
return G = (V, E)

```

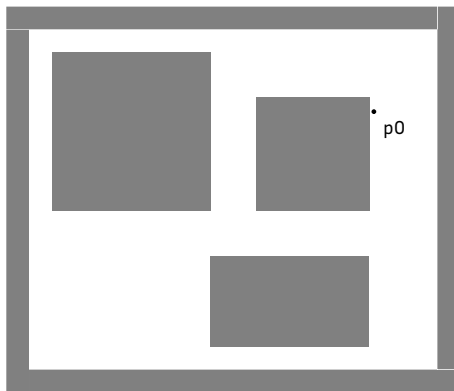
Fonctions

- ▶ **SampleFree()** :
échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ **Near(G, x, d)** : points de G à une distance de x inférieure à d
- ▶ **CollFree(x₁, x₂)** : pas d'obstacle entre x₁ et x₂

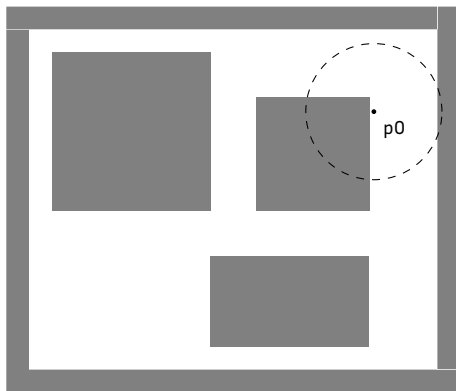
Paramètres

- ▶ n : nombre de points
- ▶ δ : rayon de connexion

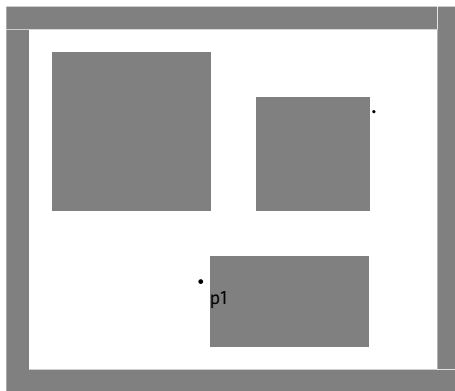
Exemple de sPRM



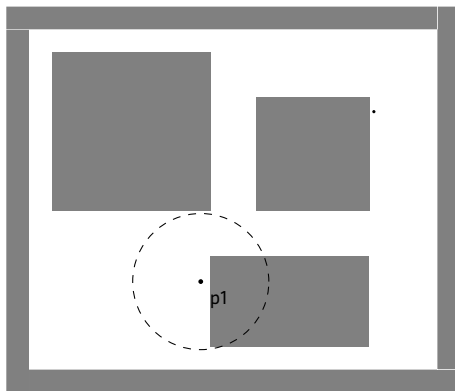
Exemple de sPRM



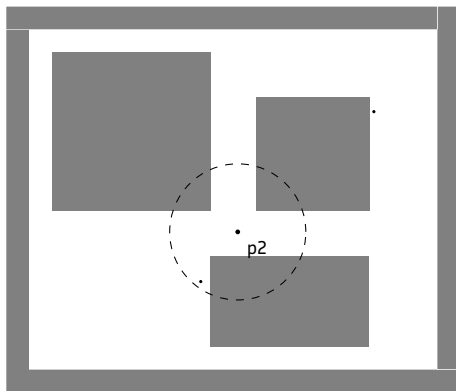
Exemple de sPRM



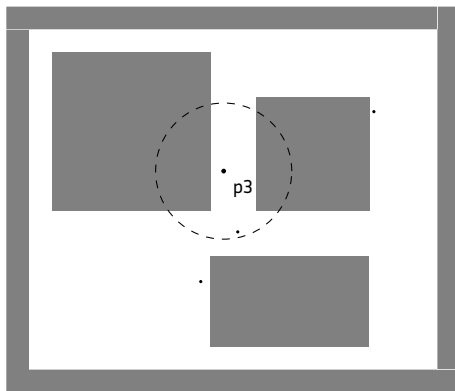
Exemple de sPRM



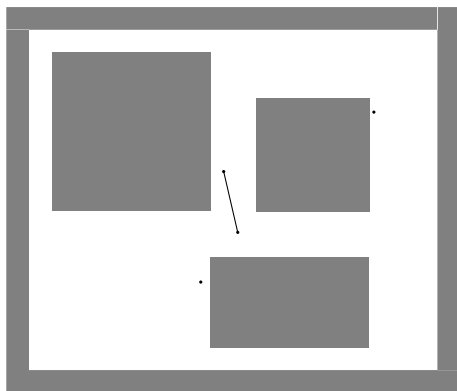
Exemple de sPRM



Exemple de sPRM

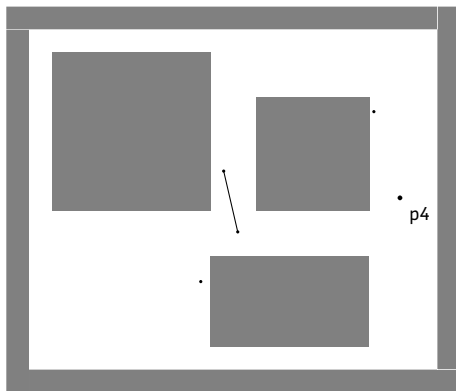


Exemple de sPRM

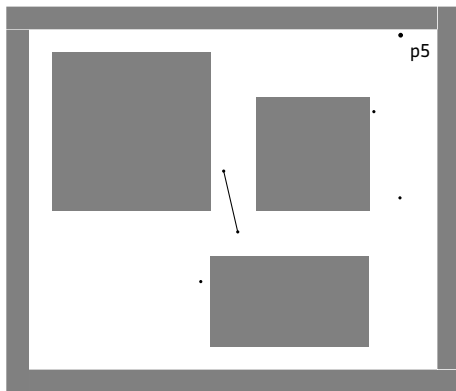


Itération : 4; Nœuds : 4; Arcs : 1

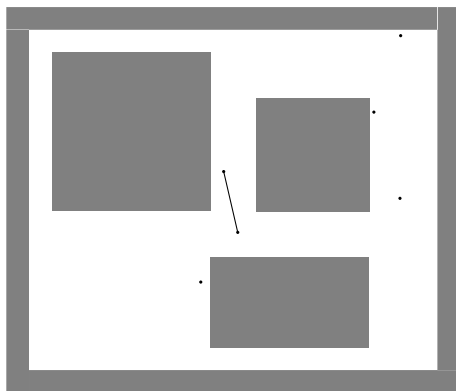
Exemple de sPRM



Exemple de sPRM

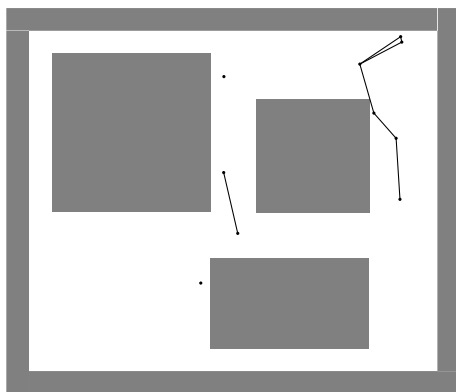


Exemple de sPRM



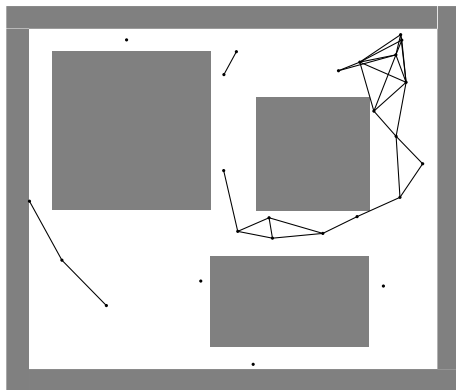
Itération : 6; Nœuds : 6; Arcs : 1

Exemple de sPRM



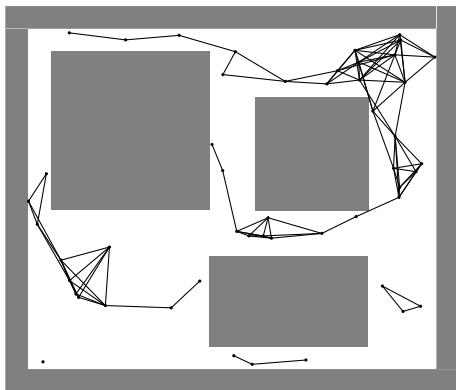
Itération : 10; Nœuds : 10; Arcs : 7

Exemple de sPRM



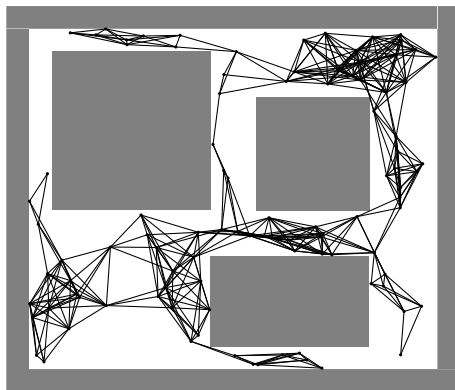
Itération : 25; Nœuds : 25; Arcs : 31

Exemple de sPRM



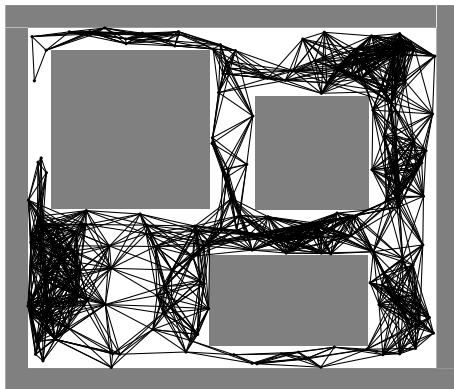
Itération : 50; Nœuds : 50; Arcs : 109

Exemple de sPRM



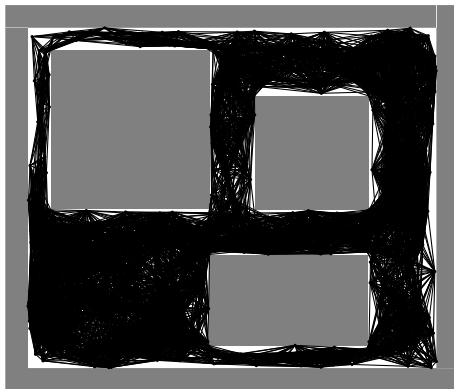
Itération : 100; Nœuds : 100; Arcs : 447

Exemple de sPRM



Itération : 200; Nœuds : 200; Arcs : 1727

Exemple de sPRM



Itération : 500; Nœuds : 500; Arcs : 10683

Algorithme PRM

PRM

```

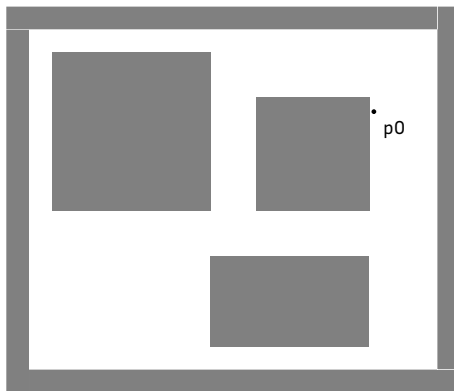
 $V \leftarrow \emptyset; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
     $x_{\text{rand}} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
     $V \leftarrow V \cup \{x_{\text{rand}}\}$ 
     $U \leftarrow \text{Near}(G = (V, E), x_{\text{rand}}, \delta)$ 
    for all  $u \in \text{Sorted}(U, x_{\text{rand}})$  do
        if  $\neg \text{Connected}(x_{\text{rand}}, u)$ 
    then
        if  $\text{CollFree}(x_{\text{rand}}, u)$ 
    then
         $E \leftarrow E \cup \{(x_{\text{rand}}, u)\}$ 
        end if
    end if
    end for
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

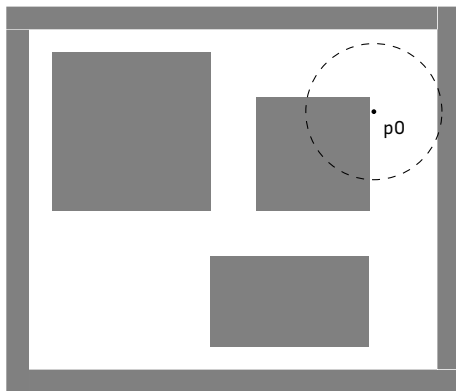
Fonctions

- ▶ **SampleFree()** : échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ **Near**(G, x, d) : points de G à une distance de x inférieure à d
- ▶ **CollFree**(x_1, x_2) : pas d'obstacle entre x_1 et x_2
- ▶ **Sorted**(V, x) : points de V triés par distance croissante de x
- ▶ **Connected**(x_1, x_2) : x_1 et x_2 dans la même comp. connexe

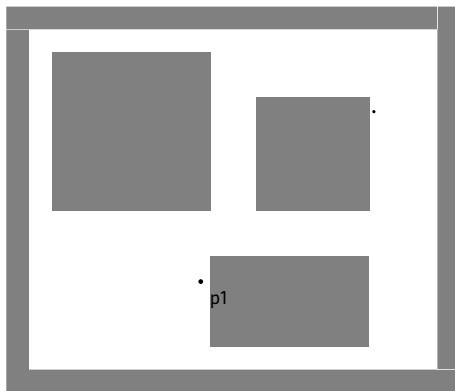
Exemple de PRM



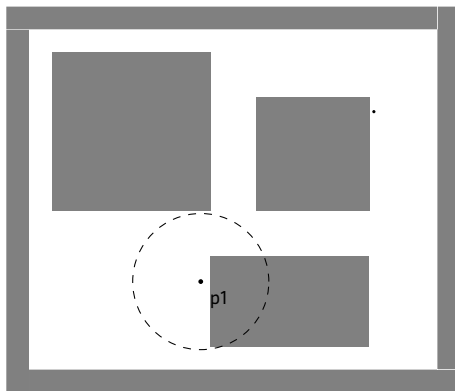
Exemple de PRM



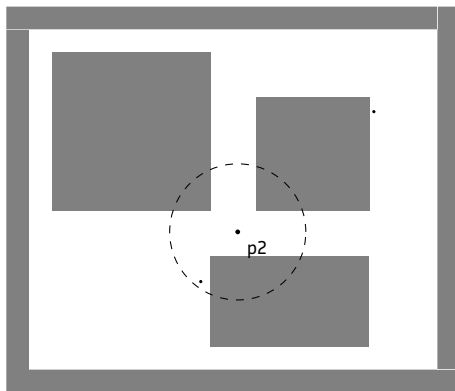
Exemple de PRM



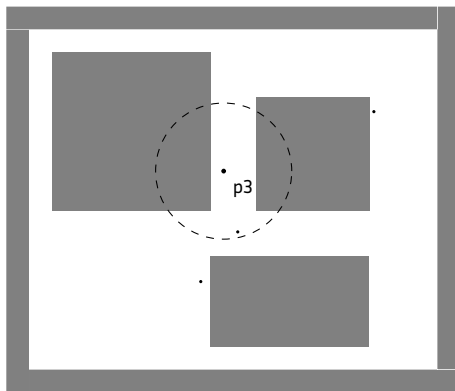
Exemple de PRM



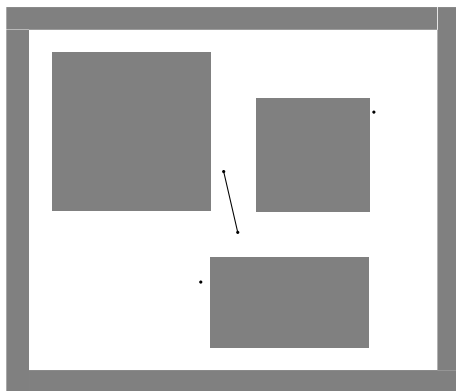
Exemple de PRM



Exemple de PRM

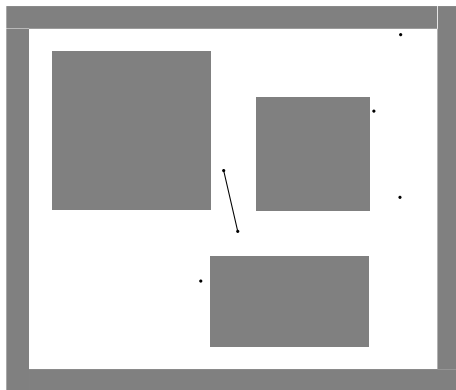


Exemple de PRM



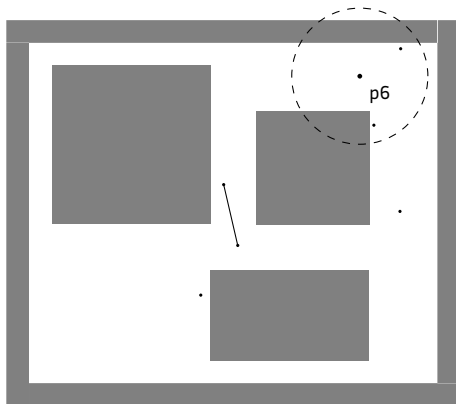
Itération : 4; Nœuds : 4; Arcs : 1

Exemple de PRM

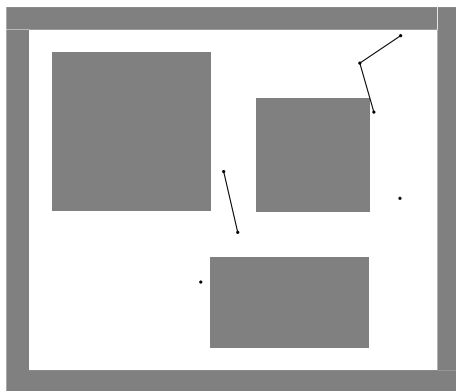


Itération : 6; Nœuds : 6; Arcs : 1

Exemple de PRM

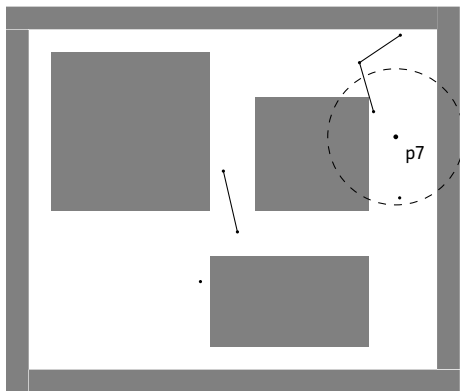


Exemple de PRM

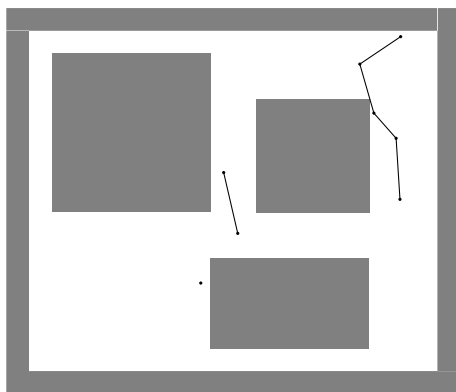


Itération : 7; Nœuds : 7; Arcs : 3

Exemple de PRM

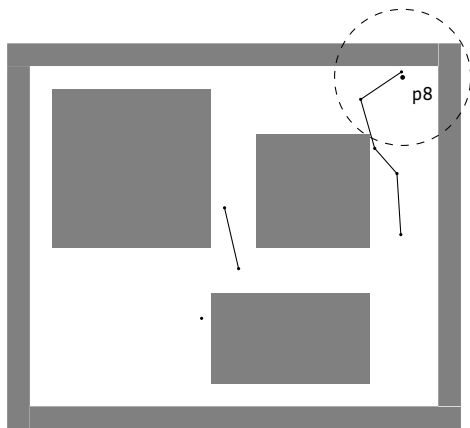


Exemple de PRM

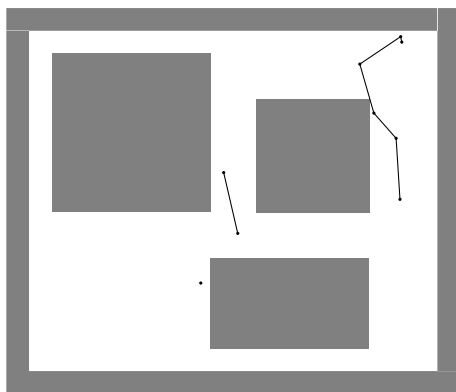


Itération : 8 ; Nœuds : 8 ; Arcs : 5

Exemple de PRM

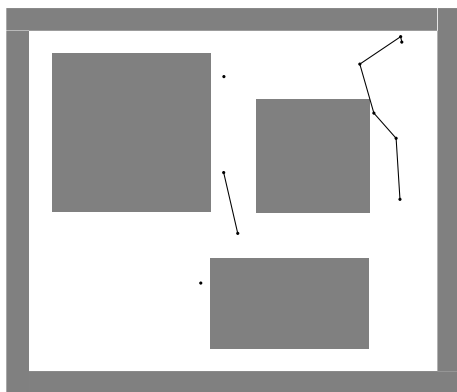


Exemple de PRM



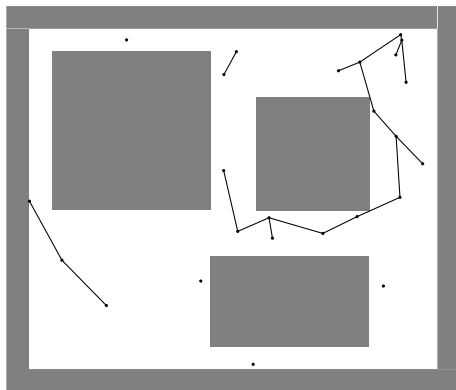
Itération : 9; Nœuds : 9; Arcs : 6

Exemple de PRM



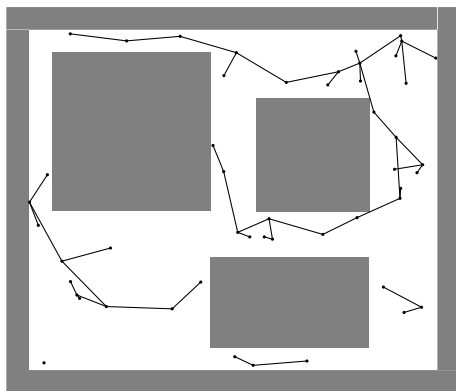
Itération : 10; Nœuds : 10; Arcs : 6

Exemple de PRM



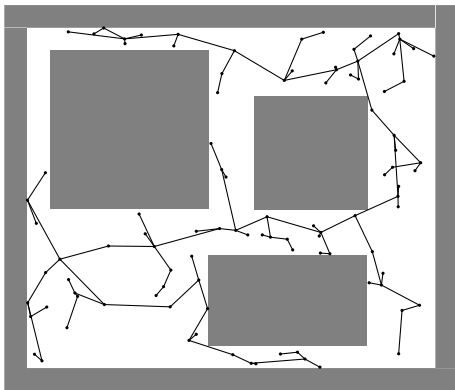
Itération : 25; Nœuds : 25; Arcs : 18

Exemple de PRM



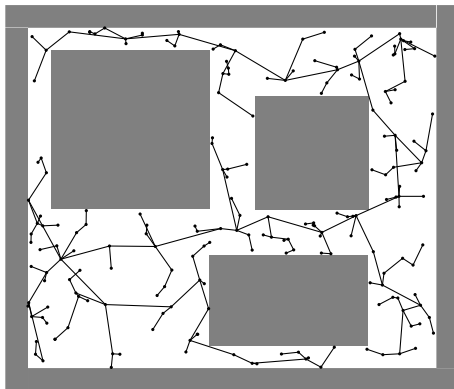
Itération : 50; Nœuds : 50; Arcs : 45

Exemple de PRM



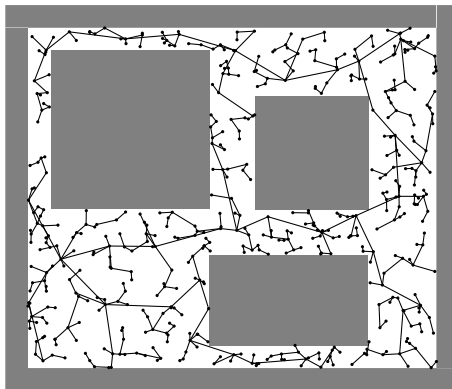
Itération : 100; Nœuds : 100; Arcs : 99

Exemple de PRM



Itération : 200; Nœuds : 200; Arcs : 199

Exemple de PRM



Itération : 500; Nœuds : 500; Arcs : 499

Conclusion sur PRM

Probabilistic Roadmaps

- ▶ deux étapes
 - ▶ création du graphe par échantillonnage
 - ▶ requête par recherche dans un graphe
 - ▶ adapté à des requêtes multiples

Variantes

- ▶ PRM [Kavraki96]
 - ▶ vérification de connectivité avant collision → création simple
 - ▶ maintien d'une forêt → requête simple
- ▶ sPRM [Kavraki98]
 - ▶ vérification de collision → création complexe
 - ▶ graphe plus complexe → requête complexe
 - ▶ chemin asymptotiquement optimal
 - ▶ incrémental ou batch

Conclusion sur PRM

Probabilistic Roadmaps

- ▶ deux étapes
 - ▶ création du graphe par échantillonnage
 - ▶ requête par recherche dans un graphe
 - ▶ adapté à des requêtes multiples

Variantes

- ▶ PRM [Kavraki96]
 - ▶ vérification de connectivité avant collision → création simple
 - ▶ maintien d'une forêt → requête simple
- ▶ sPRM [Kavraki98]
 - ▶ vérification de collision → création complexe
 - ▶ graphe plus complexe → requête complexe
 - ▶ chemin asymptotiquement optimal
 - ▶ incrémental ou batch

03

Rapidly-exploring Random Trees

Rapidly-exploring Random Trees

PRM

- ▶ création assez lourde : exploration de tout l'espace
- ▶ multiple requêtes
- ▶ environnement connu et assez statique

RRT

- ▶ requête unique
- ▶ création et planification en ligne
- ▶ exploration à partir du départ
- ▶ croissance par la frontière

Algorithme RRT

RRT

```

 $V \leftarrow \{x_{\text{init}}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{\text{rand}} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{\text{nearest}} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{\text{rand}})$ 
   $x_{\text{new}} \leftarrow \text{Steer}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{rand}}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})$  then
     $V \leftarrow V \cup \{x_{\text{new}}\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})\}$ 
  end if
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

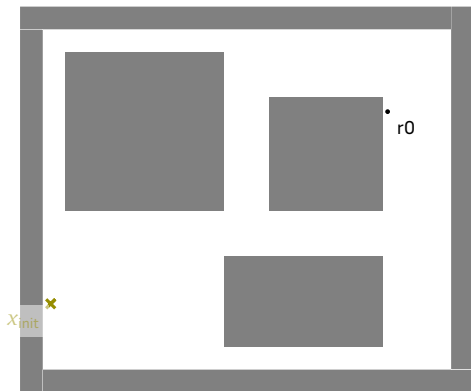
Fonctions

- ▶ $\text{SampleFree}()$:
échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ $\text{Nearest}(G, x)$: point le plus proche de x dans le graphe G
- ▶ $\text{Steer}(x_1, x_2, \eta)$: point à une distance η de x_1 vers x_2
- ▶ $\text{CollFree}(x_1, x_2)$: pas d'obstacle entre x_1 et x_2

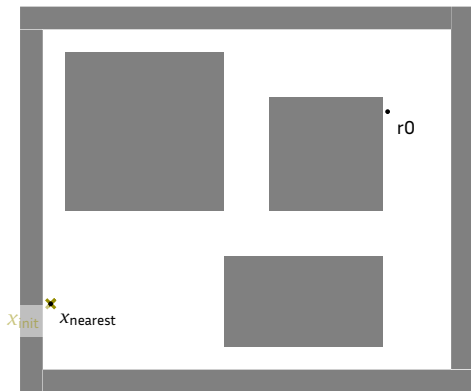
Paramètres

- ▶ n : nombre de points
- ▶ η : distance de croissance

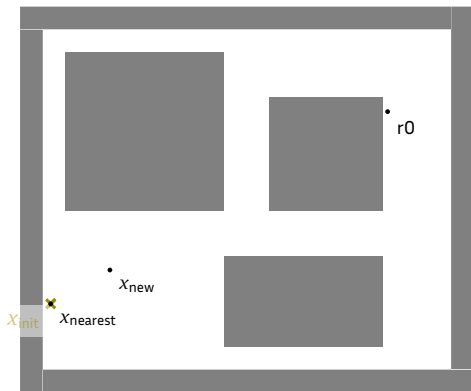
Exemple RRT



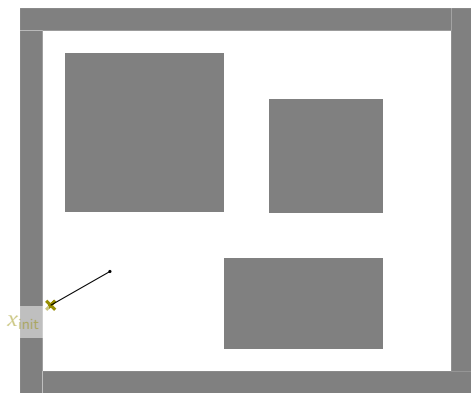
Exemple RRT



Exemple RRT

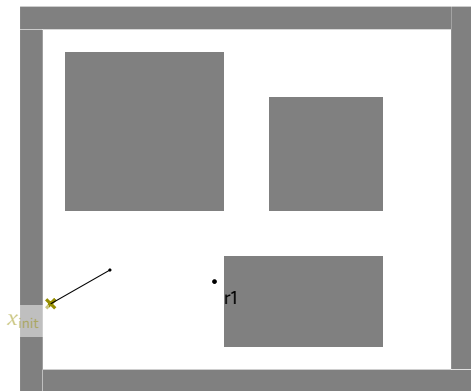


Exemple RRT

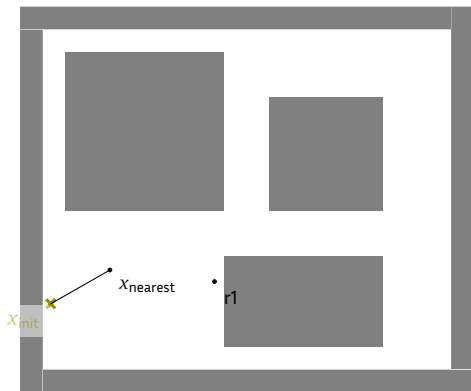


Itération : 1; Nœuds : 2; Arcs : 1

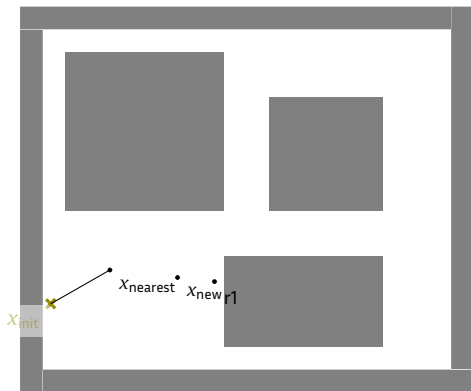
Exemple RRT



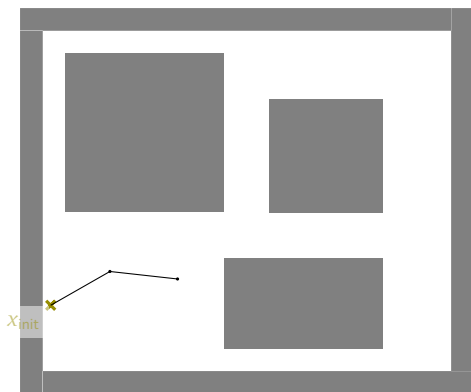
Exemple RRT



Exemple RRT

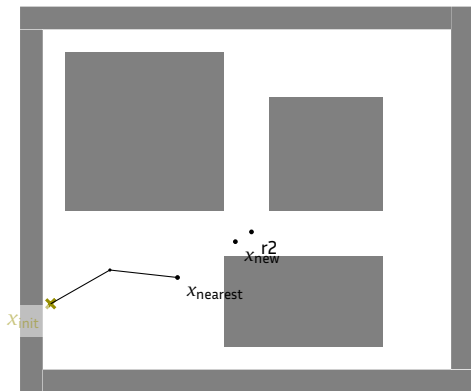


Exemple RRT

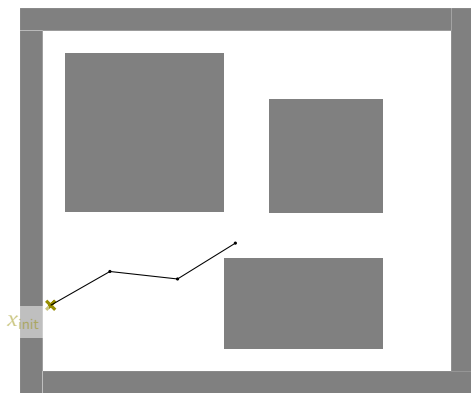


Itération : 2; Nœuds : 3; Arcs : 2

Exemple RRT

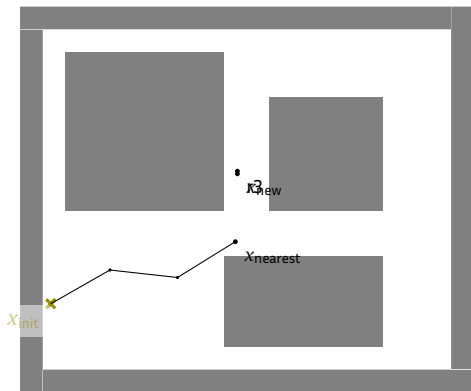


Exemple RRT

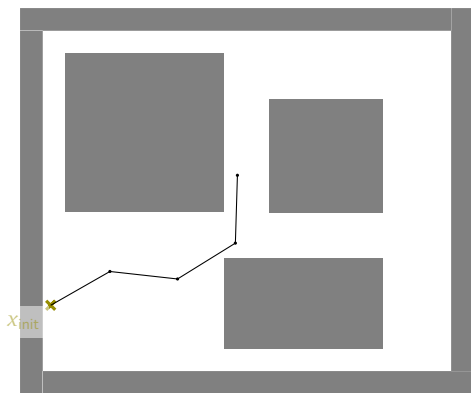


Itération : 3; Nœuds : 4; Arcs : 3

Exemple RRT

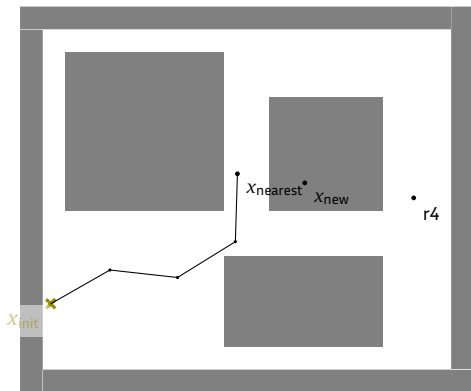


Exemple RRT

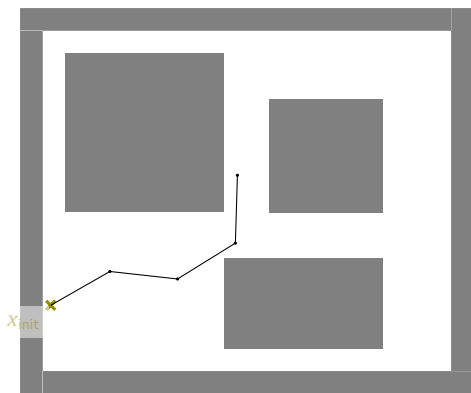


Itération : 4; Nœuds : 5; Arcs : 4

Exemple RRT

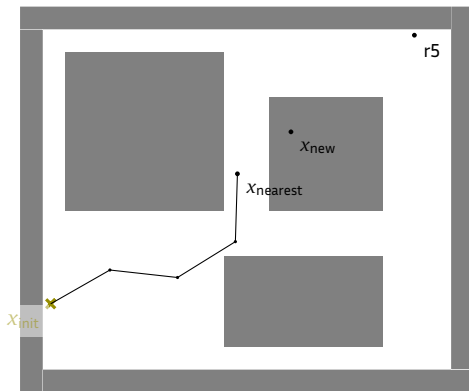


Exemple RRT

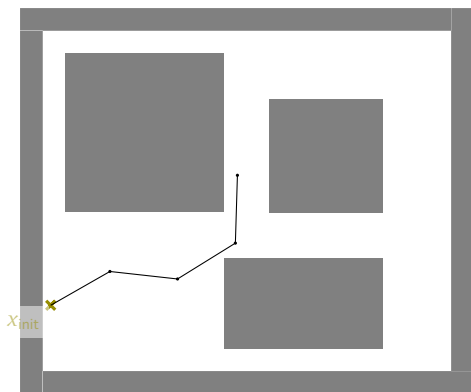


Itération : 5; Nœuds : 5; Arcs : 4

Exemple RRT

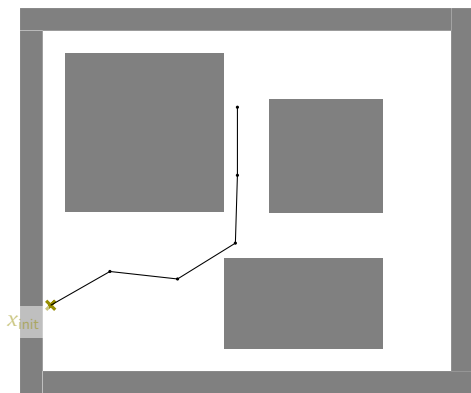


Exemple RRT



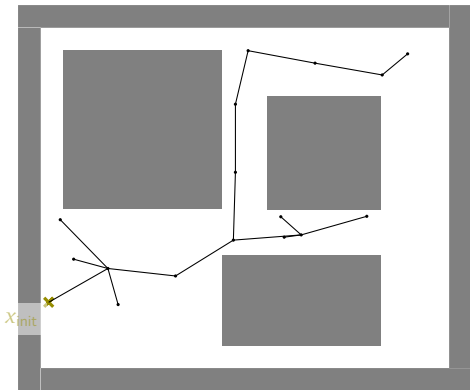
Itération : 6; Nœuds : 5; Arcs : 4

Exemple RRT



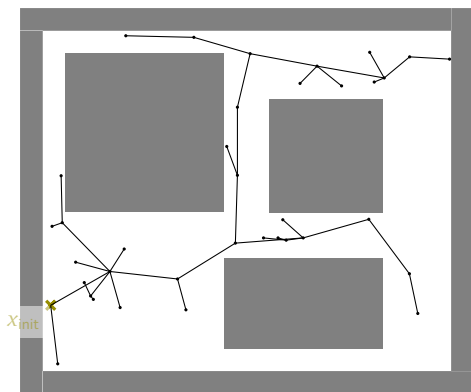
Itération : 10; Nœuds : 6; Arcs : 5

Exemple RRT



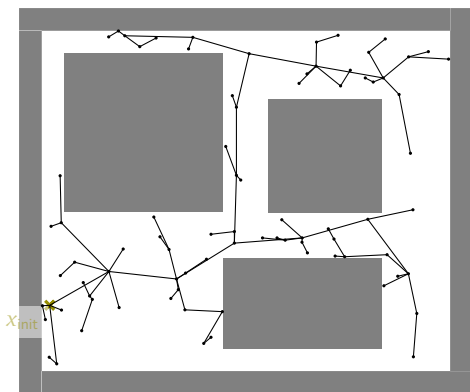
Itération : 25; Nœuds : 17; Arcs : 16

Exemple RRT



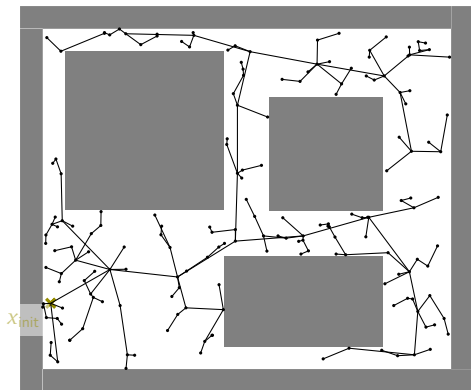
Itération : 50; Nœuds : 37; Arcs : 36

Exemple RRT



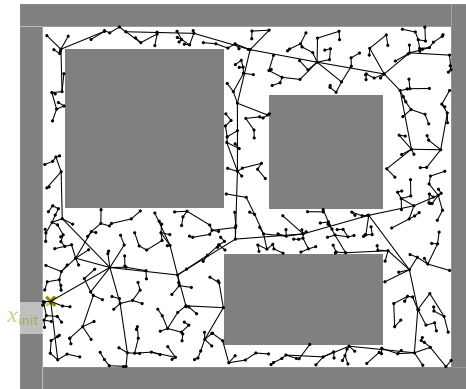
Itération : 100; Nœuds : 82; Arcs : 81

Exemple RRT



Itération : 200; Nœuds : 181; Arcs : 180

Exemple RRT



Itération : 500; Nœuds : 480; Arcs : 479

Améliorer RRT

RRT

```

 $V \leftarrow \{x_{\text{init}}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{\text{rand}} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{\text{nearest}} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{\text{rand}})$ 
   $x_{\text{new}} \leftarrow \text{Steer}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{rand}}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})$  then
     $V \leftarrow V \cup \{x_{\text{new}}\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(x_{\text{nearest}}, x_{\text{new}})\}$ 
  end if
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

Fonctions

- ▶ **SampleFree()** :
échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ **Nearest(G, x)** : point le plus proche de x dans le graphe G
- ▶ **Steer(x_1, x_2, η)** : point à une distance η de x_1 vers x_2
- ▶ **CollFree(x_1, x_2)** : pas d'obstacle entre x_1 et x_2

Améliorer RRT

Amélioration de RRT

```

 $V \leftarrow \{x_{init}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{rand} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{nearest} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{rand})$ 
   $x_{new} \leftarrow \text{Steer}(x_{nearest}, x_{rand}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{nearest}, x_{new})$  then
     $x_{near} \leftarrow \text{Near}((V, E), x_{new}, \delta)$ 
     $x_{min} \leftarrow \underset{x \in X_{near}}{\text{arg min}} C(x) + c(x, x_{new})$ 
     $V \leftarrow V \cup \{x_{new}\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(x_{min}, x_{new})\}$ 
  end if
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

Fonctions

- ▶ $\text{SampleFree}()$: échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ $\text{Nearest}(G, x)$: point le plus proche de x dans le graphe G
- ▶ $\text{Steer}(x_1, x_2, \eta)$: point à une distance η de x_1 vers x_2
- ▶ $\text{CollFree}(x_1, x_2)$: pas d'obstacle entre x_1 et x_2
- ▶ $\text{Near}(G, x, d)$: points de G à une distance de x inférieure à d
- ▶ $C(x)$: cout entre x_{init} et x en remontant le graphe
- ▶ $c(x_1, x_2)$: cout entre x_1 et x_2

Algorithme RRT*

RRT*

```

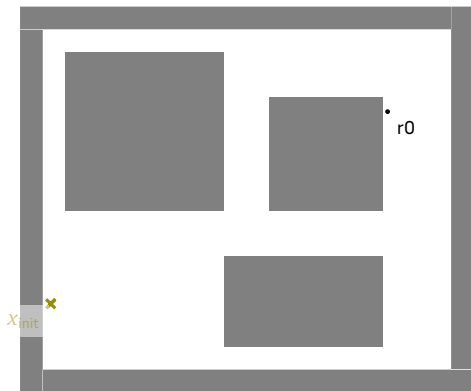
 $V \leftarrow \{x_{init}\}; E \leftarrow \emptyset$ 
for  $i = 1, \dots, n$  do
   $x_{rand} \leftarrow \text{SampleFree}()$ 
   $x_{nearest} \leftarrow \text{Nearest}((V, E), x_{rand})$ 
   $x_{new} \leftarrow \text{Steer}(x_{nearest}, x_{rand}, \eta)$ 
  if  $\text{CollFree}(x_{nearest}, x_{new})$  then
     $X_{near} \leftarrow \text{Near}((V, E), x_{new}, \delta)$ 
     $x_{min} \leftarrow \arg \min_{x \in X_{near}} C(x) + c(x, x_{new})$ 
     $V \leftarrow V \cup \{x_{new}\}; E \leftarrow E \cup \{(x_{min}, x_{new})\}$ 
    for all  $x \in X_{near}$  do
      if  $C(x_{new}) + c(x_{new}, x) < C(x)$  then
         $E \leftarrow E \setminus \{(P(x), x)\}$ 
         $E \leftarrow E \cup \{(x_{new}, x)\}$ 
      end if
    end for
  end if
end for
end for
return  $G = (V, E)$ 

```

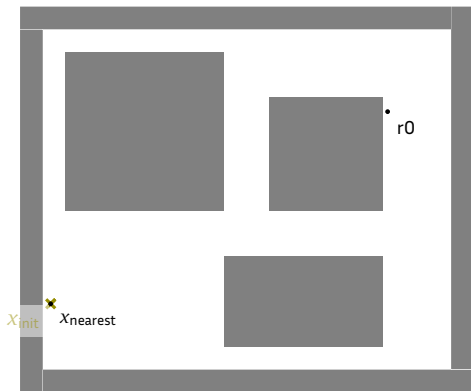
Fonctions

- ▶ $\text{SampleFree}()$: échantillonne un point dans l'espace libre
- ▶ $\text{Nearest}(G, x)$: point le plus proche de x dans le graphe G
- ▶ $\text{Steer}(x_1, x_2, \eta)$: point à une distance η de x_1 vers x_2
- ▶ $\text{CollFree}(x_1, x_2)$: pas d'obstacle entre x_1 et x_2
- ▶ $\text{Near}(G, x, d)$: points de G à une distance de x inférieure à d
- ▶ $C(x)$: cout entre x_{init} et x en remontant le graphe
- ▶ $c(x_1, x_2)$: cout entre x_1 et x_2
- ▶ $P(x)$: parent de x

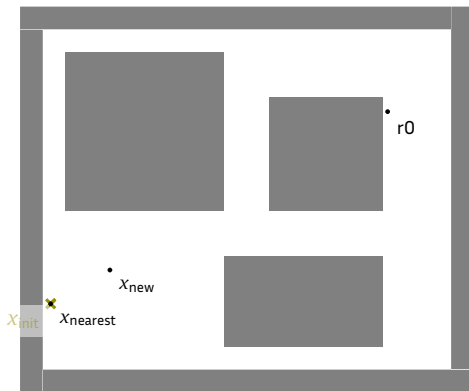
Exemple RRT*



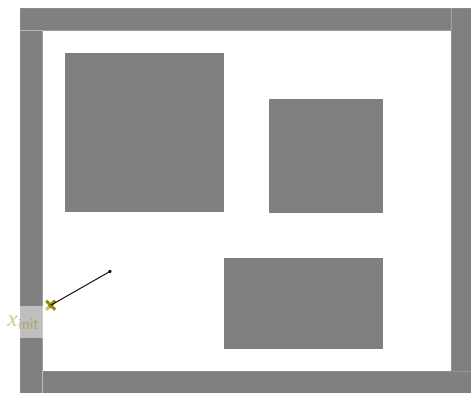
Exemple RRT*



Exemple RRT*

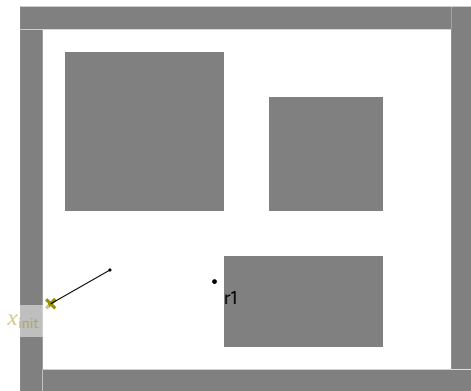


Exemple RRT*

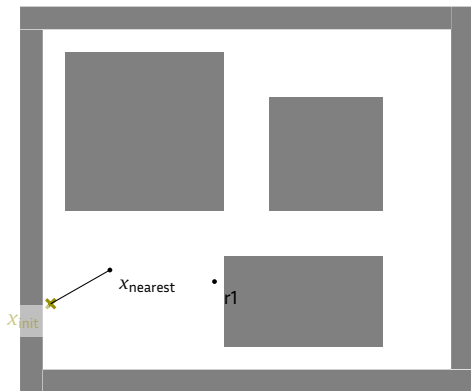


Itération : 1; Nœuds : 2; Arcs : 1

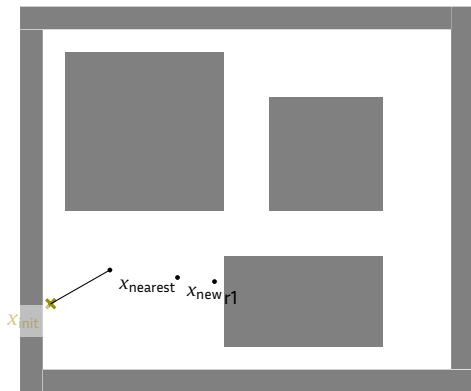
Exemple RRT*



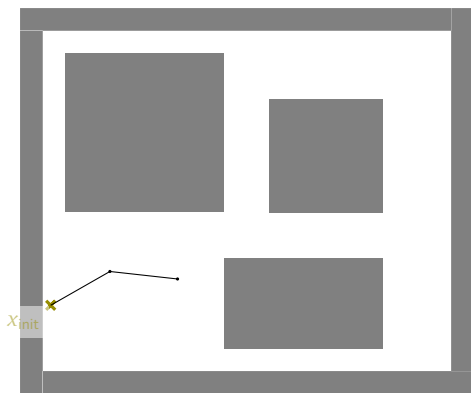
Exemple RRT*



Exemple RRT*

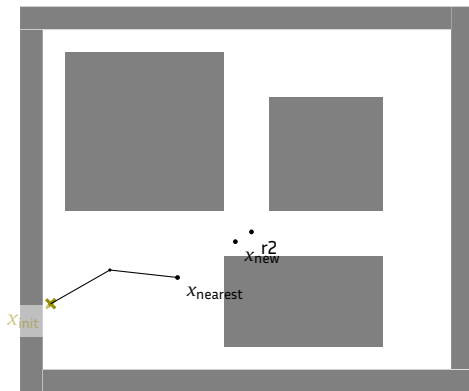


Exemple RRT*

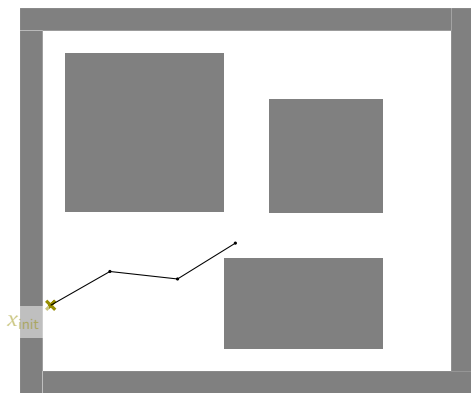


Itération : 2; Nœuds : 3; Arcs : 2

Exemple RRT*

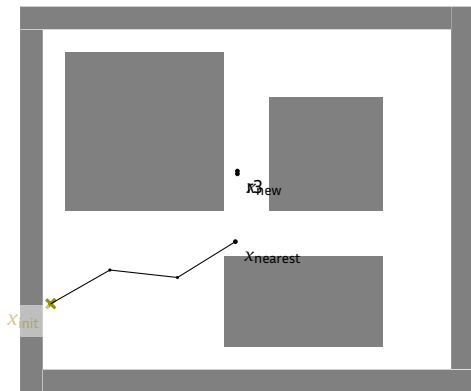


Exemple RRT*

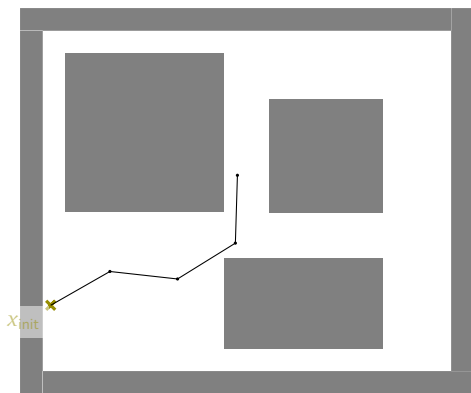


Itération : 3; Nœuds : 4; Arcs : 3

Exemple RRT*

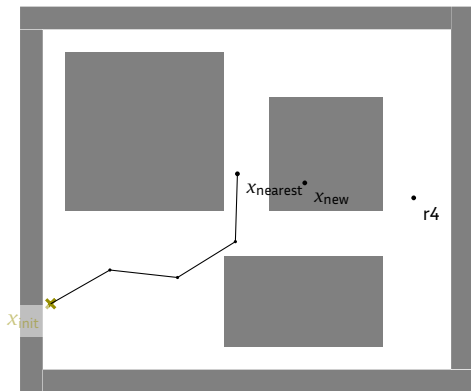


Exemple RRT*

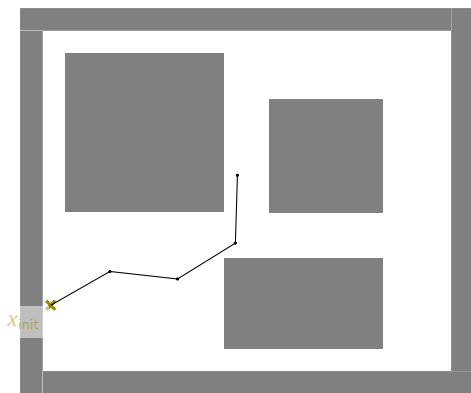


Itération : 4; Nœuds : 5; Arcs : 4

Exemple RRT*

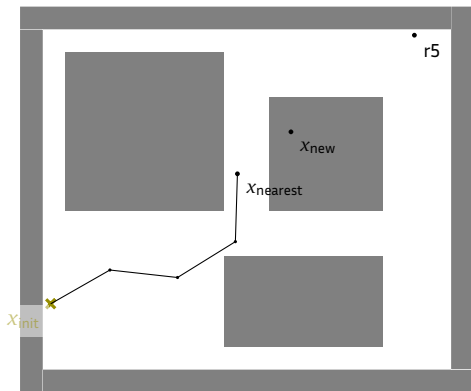


Exemple RRT*

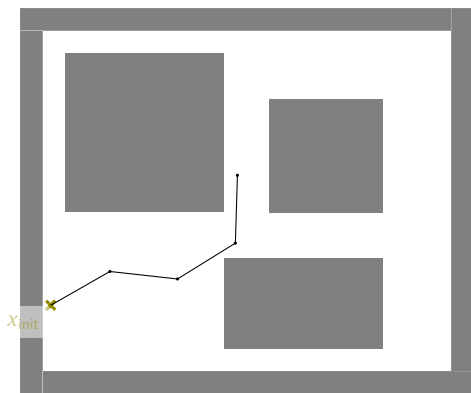


Itération : 5; Nœuds : 5; Arcs : 4

Exemple RRT*

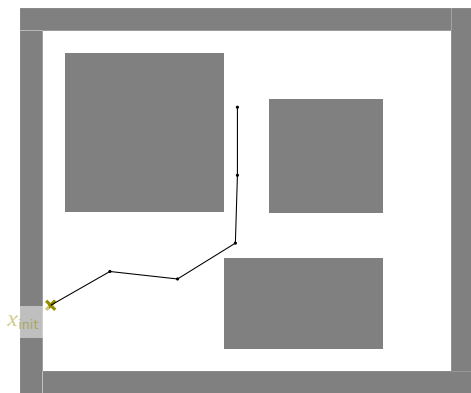


Exemple RRT*



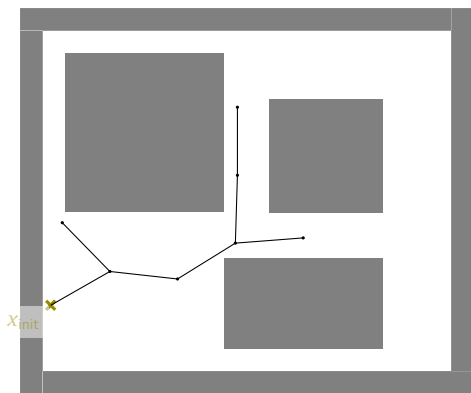
Itération : 6; Nœuds : 5; Arcs : 4

Exemple RRT*



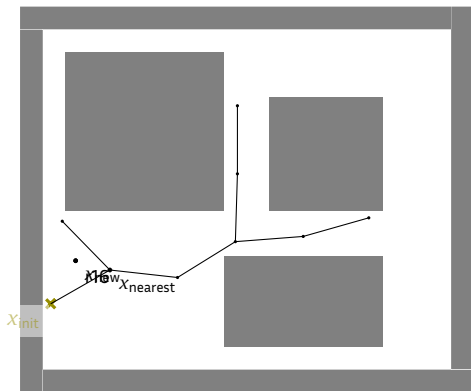
Itération : 10; Nœuds : 6; Arcs : 5

Exemple RRT*

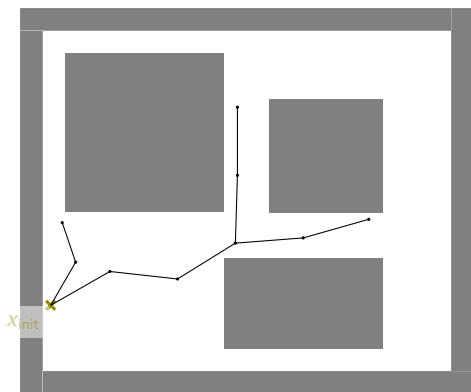


Itération : 15; Nœuds : 8; Arcs : 7

Exemple RRT*

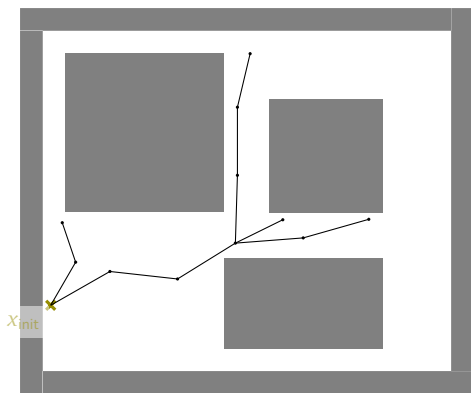


Exemple RRT*



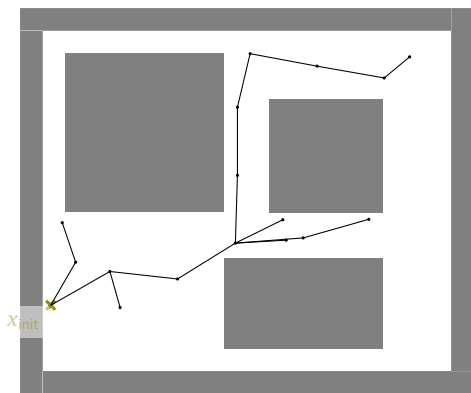
Itération : 17; Nœuds : 10; Arcs : 9

Exemple RRT*



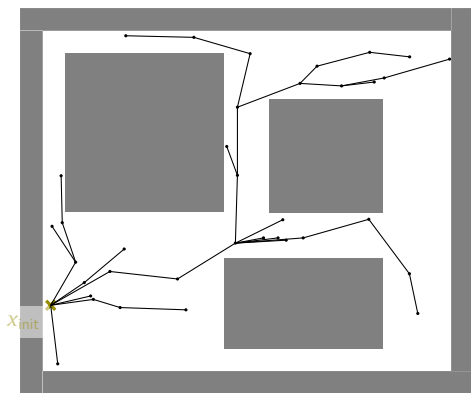
Itération : 20; Nœuds : 12; Arcs : 11

Exemple RRT*



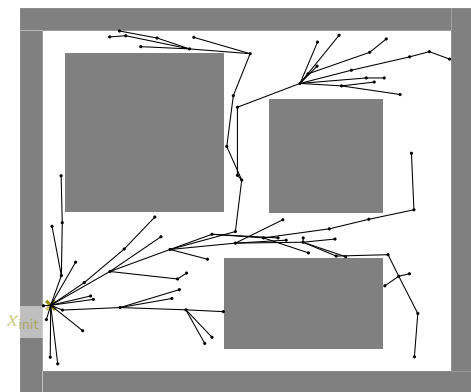
Itération : 25; Nœuds : 17; Arcs : 16

Exemple RRT*



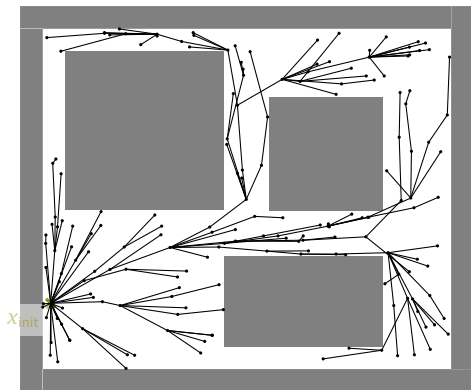
Itération : 50; Nœuds : 37; Arcs : 36

Exemple RRT*



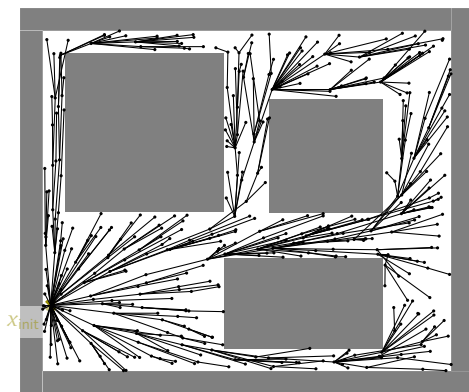
Itération : 100; Nœuds : 82; Arcs : 81

Exemple RRT*



Itération : 200; Nœuds : 181; Arcs : 180

Exemple RRT*



Itération : 500; Nœuds : 480; Arcs : 479

Conclusion sur RRT

RRT [Kuffner00]

- ▶ simple
- ▶ chemin en remontant depuis le but

RRT* [Karaman11]

- ▶ recâblage
- ▶ chemin asymptotiquement optimal
- ▶ définition optimale du rayon de recherche δ
- ▶ variante RRG* multi-requête

04

Conclusion

Conclusion

Planification par échantillonnage

- ▶ mono ou multi requête
- ▶ échantillonnage pour créer un graphe ou un arbre

PRM

- ▶ rapide (forêt) mais pas optimal

sPRM

- ▶ construction d'un graphe dense

RRT*

- ▶ planification en ligne, *any time*
- ▶ recâblage (*rewiring*) pour optimalité

Bibliographie

Livres

- ▶ Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers 1991.
- ▶ Lavelle, *Planning Algorithms*, Cambridge University Press 2006.
- ▶ Siciliano et al., *Springer Handbook of Robotics*, Springer 2016.

RRT*, PRM*, etc.

- ▶ Karaman and Frazzoli, *Sampling-based algorithms for optimal motion planning*, IJRR 2011.

Conclusion générale

Cartes

- ▶ plusieurs types de cartes

Espace de configuration

- ▶ espace libre de collision
- ▶ représentation adaptée à la planification

Planification

- ▶ création d'un graphe
 - ▶ décomposition de l'espace
 - ▶ visibilité
 - ▶ échantillonnage
- ▶ recherche dans le graphe



Merci de votre attention
Des questions?