Examen DEA ARAVIS 1999-2000 : géométrie algorithmique
14 à 17h, 27 janvier 2000

Compléments

On rappelle la relation d'Euler : dans un graphe planaire, les nombres de faces f (on compte la ou les faces infinies), d'arêtes e et de sommets s (on compte 1 et un seul sommet infini si il y a des arêtes infinies) vérifient $f - e + s = 2$.

Le théorème suivant pourra être utilisé:

Théorème : Étant donné deux ensembles de nombres réels A et B, déterminer si $A \cap B = \emptyset$ nécessite au moins $\Omega(n \log n)$ opérations, où $|A| = |B| = n$.

Rq: c'est le *set disjointness problem*.

1 Union de rectangles

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n rectangles isothétiques $[a_i,b_i] \times [c_i,d_i]$, $0 \leq i \leq n$.

— Proposer un algorithme de balayage pour calculer le bord de l'union des rectangles de $\mathcal{S}$, en supposant les rectangles en position générale.

— Faire l'inventaire des prédicats mis en jeu. Décrire les cas dégénérés pouvant se produire.

— Trouver une méthode de perturbation symbolique résolvant tous, ou la plupart des cas dégénérés. Expliciter quel cas restent non résolus.

— En position générale, on ne fait pas de différence entre rectangles ouverts ou rectangles fermés (pourquoi ?), est-il possible de choisir par le biais de la méthode de perturbation.

2 Delaunay conforme

On donne n segments dans le plan. On appelle θ la longueur du plus petit segment et τ la distance minimale entre deux extrémités de segments.

— Proposer une condition garantissant que tous les segments sont des arêtes de la triangulation de Delaunay des extrémités des segments.

— Donner un exemple prouvant que cette condition est optimale.

3 Randomisation

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points dans le plan. Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ un échantillon aléatoire de $n/2$ points et $p \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$ choisi au hasard. On appelle C le cercle de centre p passant par le plus proche voisin de C dans $\mathcal{K}$. $Del(\mathcal{S})$ est la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.

— Quel est le nombre moyen de points de $\mathcal{S}$ dans C ?

— Donner une borne sur le nombre moyen d'arêtes de $Del(\mathcal{S})$ complètement à l'intérieur de C.

4 Alignement

Étant donné n points rouges, n points verts et 1 point bleu. On cherche si il y a trois points de couleurs différentes alignés.

— Donner une borne inférieure.

— Proposer un algorithme.

5 Voronoï d'ordre k

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n sites, le diagramme de Voronoï partitionne le plan en régions dans lesquels le site le plus proche reste le même.

Le diagramme de Voronoï d'ordre k $V_k(\mathcal{S})$ est une généralisation dans laquelle au lieu de s'intéresser au plus proche voisin, on s'intéresse aux k plus proches voisins. Dans une région de $V_k(\mathcal{S})$, les k plus proches voisins restent identiques.

5.1 Voronoï d'ordre $n-1$

— Dessiner le diagramme de Voronoï d'ordre $n-1$ sur la feuille jointe.

— Établir une condition nécessaire et suffisante (similaire à la propriété du cercle vide dans Voronoï habituel) pour que v soit un sommet de $V_{n-1}(\mathcal{S})$.

— Établir une condition nécessaire et suffisante pour que la région de Voronoï de $p \in \mathcal{S}$ existe.

— Quel type de graphe planaire est possible pour $V_{n-1}(\mathcal{S})$?

— Déduire la complexité de $V_{n-1}(\mathcal{S})$ (nombre de sommets arêtes et faces).

5.2 Voronoï d'ordre 2

— Dessiner le diagramme de Voronoï d'ordre 2 sur la feuille jointe.

— Établir une condition nécessaire et suffisante pour que v soit un sommet de $V_2(\mathcal{S})$.

— Décrire la restriction de $V_2(\mathcal{S})$ à la cellule de p dans $V_1(\mathcal{S})$.

— Quel est le nombre de cellules dans $V_2(\mathcal{S})$?

— Quel est le nombre de sommet de $V_2(\mathcal{S})$ dans la cellule de p dans $V_1(\mathcal{S})$?

— Quel est le nombre total de sommet de $V_2(\mathcal{S})$?

— Proposer une algorithme de calcul de $V_2(\mathcal{S})$ et étudier sa complexité.

5.3 Voronoï d'ordre k

— Dessiner le diagramme de Voronoï d'ordre 3 sur la feuille jointe.

— Quel est le nombre de sommets dans l'ensemble de tous les Voronoï d'ordre k (pour k allant de 1 à $n-1$).

Question pour ceux qui ont le temps :

— Des idées sur la complexité de Voronoï d'ordre k ? Distinguer deux types de sommets, d'arêtes et de cellules.