Examen DEA SIC 2002-2003 : géométrie algorithmique
3h — 6 mars 2003

1 Droite ordinaire

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, on appelle droite ordinaire une droite qui passe par exactement deux points de $\mathcal{S}$, si tous les points de $\mathcal{S}$ ne sont pas alignés, l'existence d'une droite ordinaire est garantie (c'est l'un des fameux problèmes de Sylvester).

On considère un point $p \in \mathcal{S}$ et une droite L passant par p ne contenant pas d'autre point de $\mathcal{S}$. Soit δ la droite passant par deux points de $\mathcal{S} \setminus \{p\}$ ou plus coupant L le plus près de p.

1.1

Montrer que δ passe par deux points ayant des angles polaires autour de p consécutifs modulo π (attention modulo π et pas modulo 2π).

1.2

Montrer que si δ contient trois points q, r et s (si les trois points sont du même coté de L, s sera celui du milieu, sinon s sera le point le plus loin de L du cote ou il y a deux points) alors la droite ps est ordinaire.

1.3

Proposer un algorithme calculant une droite ordinaire et donner sa complexité.

2 Triangulation de Delaunay et échantillon

Notations

- $\mathcal{S}$ est un ensemble de n points du plan,
- $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ l'arbre couvrant de longueur minimale de $\mathcal{S}$ (On rappelle que l'arbre couvrant minimal est un sous-graphe de la triangulation de Delaunay, et que dans cet arbre le degré des nœuds est borné par 5.)
- On note $C(pqr)$ le cercle circonscrit aux trois points p, q et r.
- $\mathcal{K}$ un sous-ensemble de $\mathcal{S}$
- $x \in \mathcal{S}$ un point de $\mathcal{S}$
- $\mathcal{K}_x = \mathcal{S} \setminus \{x\}$ un sous-ensemble de $n-1$ points de $\mathcal{S}$
- $\alpha(x) = |\mathcal{DT}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)|$
  c'est-à-dire le nombre d'arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ crées par l'insertion de x.
- $\beta(x) = |\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x) \setminus \mathcal{DT}(\mathcal{S})|$
  c'est-à-dire le nombre d'arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ supprimées par l'insertion de x.
- $\gamma(x)$ le nombre de points d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ et celles de $\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)$.

– $\delta(x)$ le nombre de points d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ et celles de $\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)$.

Pour toutes les questions du problème, on pourra se contenter d'ordres de grandeur asymptotiques (si vous avez une borne inférieure en $\frac{n^3}{2}$ et supérieure en $28n^3$ vous pouvez conclure à $\Theta(n^3)$, dans certains cas les bornes exactes sont faciles à donner).

Pour de nombreuses questions, on peut penser au cas de la demi-parabole pour trouver les réponses, mais la démonstration doit être pour un ensemble de points quelconques.

2.1

Soit abc un triangle de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et uv une arête de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

— Montrer que si uv coupe ab alors $C(abc)$ contient u ou v.

2.2

Dans le cas le pire pour le choix de x.

-a- Donner une borne sur $\alpha(x)$.

-b- Donner une borne sur $\beta(x)$.

-c- Donner une borne sur $\gamma(x)$.

-d- Donner une borne sur $\delta(x)$.

2.3

Maintenant x va être choisi au hasard parmi les n points de $\mathcal{S}$, aucune hypothèse n'est faite sur la position des points de $\mathcal{S}$.

-a- Quelle est la valeur moyenne de $\alpha(x)$.

-b- Quelle est la valeur moyenne de $\beta(x)$.

-c- Quelle est la valeur moyenne de $\gamma(x)$.

-d- Quelle est la valeur moyenne de $\delta(x)$.

2.4

On suppose maintenant que $\mathcal{K}$ est un échantillon aléatoire de la moitié des points de $\mathcal{S}$, et abc un triangle de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$.

-a- Si x est un point aléatoire de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$, quelle est la probabilité que x soit voisin de a dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K} \cup \{x\})$?

-b- Majorer la probabilité que x appartiennent à $C(abc)$.

-c- Borner l'espérance du nombre de points de $\mathcal{S}$ dans $C(abc)$.

-d- Borner l'espérance du nombre d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$.

-e- Borner l'espérance du nombre d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

Examen DEA SIC 2002-2003 : géométrie algorithmique
3h — 6 mars 2003

1 Droite ordinaire

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, on appelle droite ordinaire une droite qui passe par exactement deux points de $\mathcal{S}$, si tous les points de $\mathcal{S}$ ne sont pas alignés, l'existence d'une droite ordinaire est garantie (c'est l'un des fameux problèmes de Sylvester).

On considère un point $p \in \mathcal{S}$ et une droite L passant par p ne contenant pas d'autre point de $\mathcal{S}$. Soit δ la droite passant par deux points de $\mathcal{S} \setminus \{p\}$ ou plus coupant L le plus près de p.

1.1

Montrer que δ passe par deux points ayant des angles polaires autour de p consécutifs modulo π (attention modulo π et pas modulo 2π).

δ passe par q et r. On regarde les droites pq, pr et qr, selon la région ou se trouverai un éventuel point s entre q et r dans l'ordre polaire, alors soit sr soit sq coupe L plus près de p. (Faire des figures !).

1.2

Montrer que si δ contient trois points q, r et s (si les trois points sont du même coté de L, s sera celui du milieu, sinon s sera le point le plus loin de L du cote ou il y a deux points) alors la droite ps est ordinaire.

Si il y a un point t sur ps entre p et s alors rt coupe L plus près, sinon c'est qt, en choisissant bien qui on appelle q et r.

1.3

Proposer un algorithme calculant une droite ordinaire et donner sa complexité.

On choisi un point p dans $\mathcal{S}$. [$O(1)$]
On trie les points par angle polaire autour de p. [$O(n \log n)$]
On choisi une direction ne contenant aucun point comme droite L. [$O(1)$]
On teste toutes les droites définie par deux points consécutifs en angle polaire pour trouver celle qui coupe le plus près. [$O(n)$]
Si cette droite est trouvée une seule fois, elle est ordinaire, si elle porte plus de trois points (consécutifs en ordre polaire) on en déduit une droite ordinaire passant par p. [$O(1)$]

2 Triangulation de Delaunay et échantillon

Notations

- $\mathcal{S}$ est un ensemble de n points du plan,
- $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.

- $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ l'arbre couvrant de longueur minimale de $\mathcal{S}$ (On rappelle que l'arbre couvrant minimal est un sous-graphe de la triangulation de Delaunay, et que dans cet arbre le degré des nœuds est borné par 5.)
- On note $C(pqr)$ le cercle circonscrit aux trois points p, q et r.
- $\mathcal{K}$ un sous-ensemble de $\mathcal{S}$
- $x \in \mathcal{S}$ un point de $\mathcal{S}$
- $\mathcal{K}_x = \mathcal{S} \setminus \{x\}$ un sous-ensemble de $n-1$ points de $\mathcal{S}$
- $\alpha(x) = |\mathcal{DT}(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)|$
  c'est-à-dire le nombre d'arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ crées par l'insertion de x.
- $\beta(x) = |\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x) \setminus \mathcal{DT}(\mathcal{S})|$
  c'est-à-dire le nombre d'arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ supprimées par l'insertion de x.
- $\gamma(x)$ le nombre de points d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ et celles de $\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)$.
- $\delta(x)$ le nombre de points d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ et celles de $\mathcal{DT}(\mathcal{K}_x)$.

Pour toutes les questions du problème, on pourra se contenter d'ordres de grandeur asymptotiques (si vous avez une borne inférieure en $\frac{n^3}{2}$ et supérieure en $28n^3$ vous pouvez conclure à $\Theta(n^3)$, dans certains cas les bornes exactes sont faciles à donner).

Pour de nombreuses questions, on peut penser au cas de la demi-parabole pour trouver les réponses, mais la démonstration doit être pour un ensemble de points quelconques.

2.1

Soit abc un triangle de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et uv une arête de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

— Montrer que si uv coupe ab alors $C(abc)$ contient u ou v.

Supposons que u soit à l'extérieur de $C(abc)$ alors $C(abc)$ et $C(abu)$ se coupent en a et b et la portion de disque E limitée par le segment ab et la portion du cercle $C(abu)$ ne contenant pas u est entièrement incluse dans le disque limité par $C(abc)$. Maintenant, un cercle vide passant par u et v (qui doit exister si uv est de Delaunay) ne peux pas contenir ni a ni b, donc $v \in E \subset C(abc)$.

2.2

Dans le cas le pire pour le choix de x.

-a- Donner une borne sur $\alpha(x)$.

$\Theta(n)$

. $n-1$, x peut être relié à chacun des autres points de $\mathcal{S}$.

-b- Donner une borne sur $\beta(x)$.

$\Theta(n)$

. $n-4 = n-1-3$, D'après la relation d'Euler, l'insertion de x ajoute 3 au nombre d'arêtes.

-c- Donner une borne sur $\gamma(x)$.

$\Theta(n^2)$

. C'est quadratique puisque le nombre d'arêtes dans $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ sont linéaires et que 2 arêtes se coupent une seule fois. On peut atteindre cette borne, par exemple, avec $\mathcal{S}$ sur la demi-parabole et x le point le plus à gauche.

-d- Donner une borne sur $\delta(x)$.

$\Theta(n)$

. C'est linéaire puisque le nombre d'arêtes dans $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ incidentes à x est au plus 5 et que $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ est linéaire.

2.3

Maintenant x va être choisi au hasard parmi les n points de $\mathcal{S}$, aucune hypothèse n'est faite sur la position des points de $\mathcal{S}$.

-a- Quelle est la valeur moyenne de $\alpha(x)$.

$\Theta(1)$

. Le degré moyen de x est < 6 (vu en cours), les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ qui ne sont pas dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ sont les arêtes incidentes à x, leur nombre moyen est donc < 6.

-b- Quelle est la valeur moyenne de $\beta(x)$.

$\Theta(1)$

. $3 = 6 - 3$, D'après la relation d'Euler, l'insertion de x ajoute 3 au nombre d'arêtes.

-c- Quelle est la valeur moyenne de $\gamma(x)$.

$\Theta(n)$

. On a évidemment $\gamma(x) \leq \alpha(x).\beta(x)$, donc on peut utiliser $Moy(\gamma(x) \leq Moy(\alpha(x)).Max(\beta(x)) = 6(n-1)$ ou $Moy(\gamma(x) \leq Max(\alpha(x)).Moy(\beta(x)) = 3(n-4)$. Une valeur linéaire est effectivement atteinte dans le cas de la demi-parabole, puisque c'est quadratique avec probabilité $\frac{1}{n}$ et constant avec probabilité $\frac{n-1}{n}$.

-d- Quelle est la valeur moyenne de $\delta(x)$.

$\Theta(1)$

. On a évidemment $\delta(x) \leq 5\beta(x)$ et donc $Moy(\delta(x)) \leq 5Moy(\beta(x)) \leq 5.3 = 15$.

2.4

On suppose maintenant que $\mathcal{K}$ est un échantillon aléatoire de la moitié des points de $\mathcal{S}$, et abc un triangle de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$.

-a- Si x est un point aléatoire de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$, quelle est la probabilité que x soit voisin de a dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K} \cup \{x\})$?

L'espérance du degré de a dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K} \cup \{x\})$ est 6, x est un des voisins avec probabilité $\frac{6}{n}$.

-b- Majorer la probabilité que x appartiennent à $C(abc)$.

Si $x \in C(abc)$ alors x est voisin de a, b et c dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K} \cup \{x\})$. Donc probabilité $\leq \frac{6}{n}$.

-c- Borner l'espérance du nombre de points de $\mathcal{S}$ dans $C(abc)$.

$\Theta(1)$

. En sommant sur les $\frac{n}{2}$ points de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$ on obtient une borne de $\frac{6n}{n2} = 3$.

-d- Borner l'espérance du nombre d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$.

$\Theta(n)$

. D'après la première question, une arête uv qui coupe ab a un de ses sommets (mettons u) dans $C(abc)$, le nombre de tels arêtes est donc borné par le nombre de tels points u (3 en moyenne d'après la question précédente) multiplié par le degré de u dans $\mathcal{ACM}(\mathcal{S})$ (au plus 5) donc on a une borne de 15. En sommant sur toutes les arêtes ab de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ on a $45n$. Un exemple linéaire est facile à trouver.

-e- Borner l'espérance du nombre d'intersections entre les arêtes de $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$.

$\Theta(n^2)$

. Borne supérieure quadratique triviale. Borne inférieure avec l'exemple de la parabole, le point x le plus à gauche est dans $\mathcal{S} \setminus \mathcal{K}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, et dans un tel cas les $n-1$ arêtes incidentes à x dans $\mathcal{DT}(\mathcal{S})$ coupent un nombre linéaire d'arêtes incidentes au point le plus à gauche dans $\mathcal{DT}(\mathcal{K})$.