Examen Master STIC Spécialité IGMMV 2004-2005 : géométrie algorithmique
3h — 3 decembre 2004

1 Delaunay et échantillonage de courbes

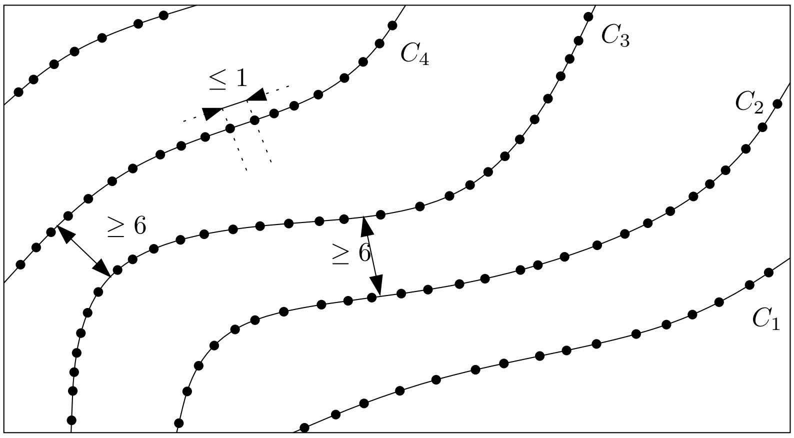

FIG. 1 –

On a un réseau de courbes à peu près parallèles C_1, C_2, C_3...On suppose que la distance entre deux courbes est toujours supérieure à 6, le rayon de courbure de ces courbes est également supérieur à 6. Ces courbes sont échantillonnées, deux points successifs sur une courbe ont une distance inférieure à 1 (Figure **??**).

On calcule la triangulation de Delaunay de l'ensemble de ces points.

1.1 Delaunay «reconstruit» les courbes

Question 1

Montrer que deux points successifs $p_{i,j}$ et $p_{i,j+1}$ sur une courbe C_i sont reliés dans la triangulation de Delaunay.

1.2 Degré dans Delaunay

Supposons dans cette question, pour simplifier, que nos courbes sont des droites parfaitement parallèles avec une distance de 6. On considère la triangulation de Delaunay des points sur C_1 et C_3 et des points $p_{2,k}$ pour $k \leq j$ mais pas les $p_{2,k}$ pour $k > j$.

Question 2

Donner une borne inférieure sur le degré de $p_{2,j}$ dans la triangulation (Figure **??**).

1.3 Insertion dans Delaunay

Supposons maintenant que les points sur chaque droite ont des écarts de longueur 1 exactement, que les points sur C_1 et C_3 soient déjà insérés dans la triangulation de Delaunay. Si on insère les points dans l'ordre $p_{2,1}$, $p_{2,2}$, $p_{2,3}$...$p_{2,k}$, donner une borne inférieure sur le nombre de triangles créés au cours de l'insertion de cette séquence de points.

Question 3

Proposer un autre ordre d'insertion, en donnant une estimation du nombre de triangle créés (et en essayant de minimiser ce nombre).

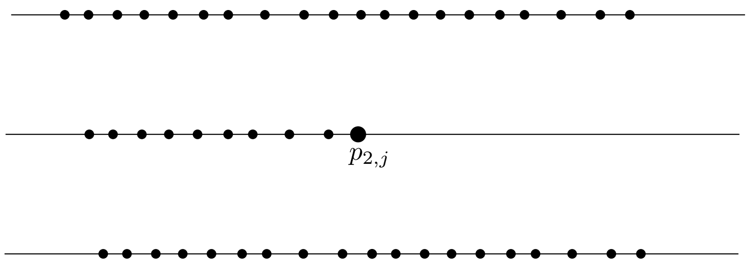

FIG. 2 –

2 Représentation de triangulation

On considère une triangulation de n points dont l'enveloppe convexe est un carré.

2.1 Demi-arêtes

Question 4

Si on utilise la représentation en demi-arêtes vue en cours avec des objets associés aux demi-arêtes et aux sommets, quel est le nombre de pointeurs nécéssaire dans cette structure en fonction de n ?

Question 5

Étant donné e une demi-arête, quel est le triangle voisin du triangle défini par les trois sommets $e.target$, $e.next.target$, $e.next.next.target$ opposé à $e.target$? Et celui opposé à $e.next.next.target$? Quel est la complexité de ces opérations ?

2.2 Triangles

Question 6

Si on utilise la représentation basé sur des triangles et des sommets quel est le nombre de pointeurs nécéssaire ?

2.3 Sommets

On va utiliser la structure suivante : le seul objet est le sommet, un sommet v comporte, outre les coordonnées du point, les informations suivantes :

- son degré d_v dans la triangulation.
- un tableau N_v de taille d_v de pointeurs vers les sommets voisins ordonnés dans l'ordre direct autour de v.

Question 7

Quel est le nombre mots machine nécéssaire ? (on supposera que le degré comme les pointeurs occupe un mot machine).

Question 8

Étant donné v, i décrire comment trouver le triangle voisin du triangle $vN_v(i)N_v(i+1)$ opposé au sommet v ? Quelle est la complexité de cette opération ?

2.4 Triangles et quadrilatères

On a maintenant comme objet des sommets, et un mélange de triangles et de quadrilatères (regroupant deux triangles). On a toujours n sommets.

Question 9

Décrire une structure (qui a des pointeurs vers quoi ? quelles information supplémentaires sont nécessaires ?) permettant de représenter une triangulation avec ces objets.

Question 10

Combien de pointeurs seraient nécéssaires dans une telle structure en fonction de n et du rapport $\alpha = \frac{\text{nombre de quadrilatères}}{\text{nombre de triangles}}$?

Question 11

Étant donné une triangulation, comment regrouper les triangles deux par deux en quadrilatères en laissant un minimum de triangles isolés ? Donner une borne inférieure sur le α obtenu.

Question 12

Donner un exemple de triangulation de n points ne permettant pas un α supérieur.

Question 13

Quel borne peut-on garantir sur le nombre de pointeurs en appliquant ce découpage ?

3 Algo mystère

On donne l'algorithme suivant :

```
entrée : S un ensemble de n points du plan
trier S en x ;
initier une liste circulaire avec les 3 points les plus à gauche
tel que u soit le point le plus à droite et u, u.suivant, u.suivant.suivant tourne à gauche ;
dessiner u, u.suivant, u.suivant.suivant
Pour v le prochain en x
    w = u
    dessiner uv
    tant que (v, u, u.suivant) tourne à droite
        u = u.suivant ;
        dessiner uv ;
    v.suivant = u ; u.pred = v ;
    tant que (v, w, w.pred) tourne à gauche
        w = w.pred ;
        dessiner wv ;
    v.pred = w ; w.suivant = v ;
    u = v ;
```

Question 14

À la fin de l'algorithme, qu'est ce qui a été dessiné ? Que contient la liste (définie par *pred* et *suivant*) ?

Question 15

Combien de fois l'instruction «dessiner» est-elle appellée ? Quelle est la complexité de cet algorithme ?

4 Question subsidiaire : Delaunay et projection

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n points en dimension 3. On imagine un observateur à l'infini qui observe ces points (c'est à dire que l'on projette ces points sur un plan perpendiculaire à la direction de l'observateur) et on cherche à compter combien on peut obtenir de triangulations combinatoirement différentes.

(On pourra considérer la sphère des directions de projection, et la découper en fonction des différentes triangulations.)

Question 16

Trouver une borne supérieure de la forme $O(n^k)$ pour un certain k.

Question 17

Trouver une borne inférieure de la forme $\Omega(n^{k'})$ pour un certain $k' \leq k$ (en exhibant un exemple).

Examen Master STIC Spécialité IGMMV 2004-2005 : géométrie algorithmique
3h — 3 decembre 2004

1 Delaunay et échantillonage de courbes

On a un réseau de courbes à peu près parallèles C_1, C_2, C_3...On suppose que la distance entre deux courbes est toujours supérieure à 6, le rayon de courbure de ces courbes est également supérieur à 6. Ces courbes sont échantillonnées, deux points successifs sur une courbe ont une distance inférieure à 1 (Figure **??**).

On calcule la triangulation de Delaunay de l'ensemble de ces points.

1.1 Delaunay «reconstruit» les courbes

Question 1

Montrer que deux points successifs $p_{i,j}$ et $p_{i,j+1}$ sur une courbe C_i sont reliés dans la triangulation de Delaunay.

Correction : Le cercle Γ de centre $p_{i,j}$ de rayon 1 contient $p_{i,j+1}$ et ne contient pas de points sur d'autre courbes. C_i est coincé entre les cercles tangents à C_i en $p_{i,j}$ de rayon 6 donc si on regarde le cercle de diamètre $p_{i,j}p_{i,j+1}$ il ne peut pas contenir de $p_{i,j'}$ pour $j' < j$. L'argument symétrique en $p_{i,j+1}$ permet de conclure.

1.2 Degré dans Delaunay

Supposons dans cette question, pour simplifier, que nos courbes sont des droites parfaitement parallèles avec une distance de 6. On considère la triangulation de Delaunay des points sur C_1 et C_3 et des points $p_{2,k}$ pour $k \leq j$ mais pas les $p_{2,k}$ pour $k > j$.

Question 2

Donner une borne inférieure sur le degré de $p_{2,j}$ dans la triangulation (Figure **??**).

Correction : Si on considère les points d'échantillonage sur C_1 d'abcisse tel que $x_{p_{2,j}} \leq x \leq x_{p_{2,j}} + 6$ les cercles tangents à C_1 à ces points et passant par $p_{2,j}$ ne touchent pas C_3, ils sont donc vide, il y a au moins 5 tels points. Le point sur C_1 d'abcisse immédiatement inférieure à $x_{p_{2,j}}$ convient également. On a de même des points sur C_3 plus $p_{2,j-1}$ soit un degré 13.

1.3 Insertion dans Delaunay

Supposons maintenant que les points sur chaque droite ont des écarts de longueur 1 exactement, que les points sur C_1 et C_3 soient déjà insérés dans la triangulation de Delaunay. Si on insère les points dans l'ordre $p_{2,1}$, $p_{2,2}$, $p_{2,3}$...$p_{2,k}$, donner une borne inférieure sur le nombre de triangles créés au cours de l'insertion de cette séquence de points.

Question 3

Proposer un autre ordre d'insertion, en donnant une estimation du nombre de triangle créés (et en essayant de minimiser ce nombre).

Correction : À peu près $13 \cdot k$. On insère les points de 12 en 12 à un coût de 22, puis on continue «dichotomiquement» : les milieux coutent 12, les milieux des milieux coutent 8 les derniers points coutent 7 et 6, soit un degré moyen de $\frac{1}{12}22 + \frac{1}{12}12 + \frac{2}{12}8 + \frac{4}{12}7 + \frac{4}{12}6 = 8.5$.

2 Représentation de triangulation

On considère une triangulation de n points dont l'enveloppe convexe est un carré.

2.1 Demi-arêtes

Question 4

Si on utilise la représentation en demi-arêtes vue en cours avec des objets associés aux demi-arêtes et aux sommets, quel est le nombre de pointeurs nécéssaire dans cette structure en fonction de n ?

Correction : On a $2n-6$ faces et $3n-7$ arêtes (relation d'Euler), donc $6n-14$ demi-arêtes ayant chaqu'une des pointeurs twin, next et target. On ajoute n sommet avec un pointeur et ça fait $19n-42$.

Question 5

Étant donné e une demi-arête, quel est le triangle voisin du triangle défini par les trois sommets $e.target, e.next.target, e.next.next.target$ opposé à $e.target$? Et celui opposé à $e.next.next.target$? Quel est la complexité de ces opérations ?

Correction : C'est
$e.next.next.twin.target, e.next.next.twin.next.target, e.next.next.twin.next.next.target$
et $e.next.twin.target, e.next.twin.next.target, e.next.twin.next.next.target$
que l'on trouve donc en $O(1)$.

2.2 Triangles

Question 6

Si on utilise la représentation basé sur des triangles et des sommets quel est le nombre de pointeurs nécéssaire ?

Correction : On a $2n-6$ triangles à 6 pointeurs chaqu'un, trois voisins et trois sommets, et d'autre part n sommets avec un seul pointeur. Au total $13n-36$.

2.3 Sommets

On va utiliser la structure suivante : le seul objet est le sommet, un sommet v comporte, outre les coordonnées du point, les informations suivantes :

- son degré d_v dans la triangulation.
- un tableau N_v de taille d_v de pointeurs vers les sommets voisins ordonnés dans l'ordre direct autour de v.

Question 7

Quel est le nombre mots machine nécéssaire ? (on supposera que le degré comme les pointeurs occupe un mot machine).

Correction : La somme des degré est $6n-14$, c'est le nombre de pointeurs, si on ajoute les n degrés on obtient $7n-14$

Question 8

Étant donné v, i décrire comment trouver le triangle voisin du triangle
$vN_v(i)N_v(i+1)$ opposé au sommet v ? Quelle est la complexité de cette opération ?

Correction : On tourne autour de $N_v(i)$ en regardant le tableau de ses voisins jusqu'à ce que l'on trouve l'indice j de $N_v(i+1)$, le triangle voisin est $N_v(i)N_{N_v(i)}(j-1)N_v(i+1)$. Ça prends un temps proportionnel au degré $O(d_{N_v(i)})$.

2.4 Triangles et quadrilatères

On a maintenant comme objet des sommets, et un mélange de triangles et de quadrilatères (regroupant deux triangles). On a toujours n sommets.

Question 9

Décrire une structure (qui a des pointeurs vers quoi ? quelles information supplémentaires sont nécessaires ?) permettant de représenter une triangulation avec ces objets.

Correction : Un sommet contient un pointeur vers un objet, triangle ou quadrilatère. Un triangle est comme d'habitude constitués de trois pointeurs vers des sommets et trois vers les voisins. Un quadrilatère est constitué de 4 pointeurs vers des sommets, quatre vers les voisins et un bit pour indiquer quelle est la diagonale choisie. Chaque pointeur vers un triangle/quad est augmenté de deux bits, un bit pour dire si il pointe sur un

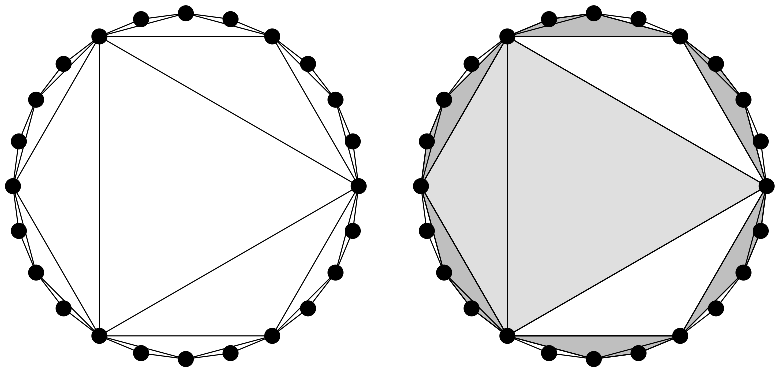

FIG. 1 –

triangle ou un quadrilatère, et dans ce deuxième cas un bit pour dire si on considère le premier ou le deuxième triangle du quadrilatère.

Question 10

Combien de pointeurs seraient nécéssaires dans une telle structure en fonction de n et du rapport $\alpha = \frac{\text{nombre de quadrilatères}}{\text{nombre de triangles}}$?

Correction : $2n \simeq 2q + t = 2q + \frac{1}{\alpha}q$, $q = \frac{2\alpha}{2\alpha+1}n$, $t = \frac{2}{2\alpha+1}n$. Le nombre de pointeurs est $n + 6t + 8q = \frac{17\alpha+13}{2\alpha+1}n$ soit $13n$ si il n'y a que des triangles et $8.5n$ si il n'y a que des quadrilatères.

Question 11

Étant donné une triangulation, comment regrouper les triangles deux par deux en quadrilatères en laissant un minimum de triangles isolés ? Donner une borne inférieure sur le α obtenu.

Correction : 1) Si il y a un point qui n'est pas sur l'enveloppe convexe, prendre une arête reliant un point intérieur à un point de l'enveloppe convexe, et enlever les deux triangles incidents, on obtient un quadrilatère et une triangulation de $t-2$ triangles.

2) Sinon, on peut considérer le dual de la triangulation, c'est un arbre binaire de t nœuds, on enlève toutes les feuilles de cet arbre, et on considère une f feuille du nouvel arbre. Dans l'arbre initial, soit f avait un seul descendant f' et on produit un quadrilatère ff' soit il en avait deux f' et f'' et on produit un quadrilatère ff' et un triangle f'' et il nous reste une triangulation de taille $t-2$ ou $t-3$. Si $t=1$ ou 2 on produit un dernier trainagle ou quadrilatère.

À l'exception du triangle final, à chaque fois que l'on produit un triangle on a un quadrilatère en même temps donc $q \geq t-1$, et $\alpha \gtrsim 1$.

Question 12

Donner un exemple de triangulation de n points ne permettant pas un α supérieur.

Correction : L'exemple atteignant la borne est obtenu en triangulant un polygone à $3k$ sommets en ne faisant que des «oreilles» (Figure ??).

Question 13

Quel borne peut-on garantir sur le nombre de pointeurs en appliquant ce découpage ?

Correction : La fonction $\frac{17\alpha+13}{2\alpha+1}$ (qui est une hyperbole équilatère) est décroissante de 13 vers 8.5, en 1 elle vaut 10. On a donc un maximum de $10n$ pointeurs (avec cette fois ci un accés au voisin en temps constant).

3 Algo mystère

On donne l'algorithme suivant :

entrée : S un ensemble de n points du plan

trier S en x ;

initier une liste circulaire avec les 3 points les plus à gauche

tel que u soit le point le plus à droite et $u, u.suivant, u.suivant.suivant$ tourne à gauche ;

dessiner $u, u.suivant, u.suivant.suivant$
Pour v le prochain en x
    $w = u$
    dessiner uv
    tant que $(v, u, u.suivant)$ tourne à droite
        $u = u.suivant$;
        dessiner uv ;
    $v.suivant = u$; $u.pred = v$;
    tant que $(v, w, w.pred)$ tourne à gauche
        $w = w.pred$;
        dessiner wv ;
    $v.pred = w$; $w.suivant = v$;
    $u = v$;

Question 14

À la fin de l'algorithme, qu'est ce qui a été dessiné ? Que contient la liste (définie par $pred$ et $suivant$) ?

Correction : Une triangulation des points et l'enveloppe convexe.

Question 15

Combien de fois l'instruction «dessiner» est-elle appellée ? Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Correction : C'est le nombre d'arêtes dans une triangulation soit à peu près $3n$. La complexité de l'algorithme est dominé par le tri de prétraitement qui est $O(n \log n)$ le reste étant $O(n)$.

4 Question subsidiaire : Delaunay et projection

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n points en dimension 3. On imagine un observateur à l'infini qui observe ces points (c'est à dire que l'on projette ces points sur un plan perpendiculaire à la direction de l'observateur) et on cherche à compter combien on peut obtenir de triangulations combinatoirement différentes.

(On pourra considérer la sphère des directions de projection, et la découper en fonction des différentes triangulations.)

Question 16

Trouver une borne supérieure de la forme $O(n^k)$ pour un certain k.

Question 17

Trouver une borne inférieure de la forme $\Omega(n^{k'})$ pour un certain $k' \leq k$ (en exhibant un exemple).

Correction : Conjecturé $\Theta(n^4)$, mais je ne sais pas le démontrer, ceci dit j'ai quelques résultats intermédiaires mais je les donne pas (c'est une question subsidiaire :-)