Géométrie algorithmique, examen M2, 6 février 2009, énoncé

1 Losange vide

Étant donné un ensemble S de n points dans le plan, on cherche des losanges vides de points de S ayant les axes de coordonnées comme axe de symétrie (Figure 1).

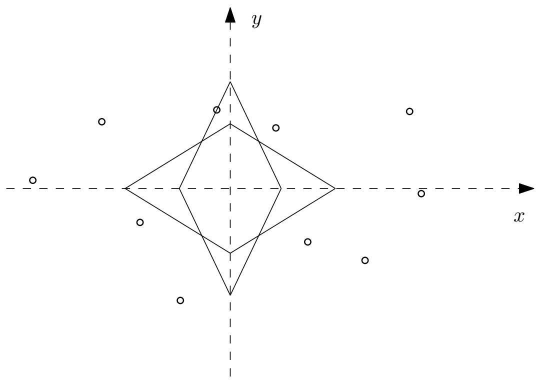

FIG. 1 – Deux losanges vides.

1.1

Décrire les losanges localement maximaux (au sens de l'inclusion).

1.2

Si tous les points vérifient $x, y \geq 0$, donner un moyen simple de décrire les losanges cherchés.

Définir des losanges extrémaux (en nombre fini) donnant une bonne description de l'ensemble des losanges vides.

Combien y en a-t-il dans le cas le pire ?

1.3

Si les points sont maintenant dans tout le plan, donner un algorithme pour trouver une description des losanges vides.

2 Triangulation et degrés

On considère un ensemble $\mathcal{S}$ de n points et une triangulation $\mathcal{T}$ de l'enveloppe convexe de ces points. On va regarder le degré de ces points, et en particulier la parité du degré dans différentes triangulations.

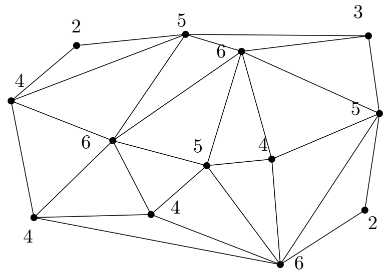

FIG. 2 – Triangulation

2.1

Sur la figure 2 un ensemble de 12 points est triangulé avec 3 points de degré impair et 9 de degré pair.

Dessiner sur la feuille jointe une triangulation avec peu de points de degré pair.

2.2

Démontrer qu'il est impossible pour cet ensemble d'obtenir une triangulation sans aucun point de degré impair.

2.3

Dessiner un exemple avec un ensemble de points différent et une triangulation où tous les sommets on degré impair. Un ensemble et une triangulation où tous les sommets ont un degré pair.

2.4

Si on considère un quadrilatère convexe formé par deux triangles de la triangulation, quel est l'influence sur les degrés de basculer la diagonale.

Si on regarde le nombre de sommet de degré impair d'un tel quadrilatère δ, relier la valeur de ce nombre avant la bascule n_δ a sa valeur après la bascule n'_δ.

2.5

Si on regarde 5 points, montrer qu'il y a un quadrilatère convexe (une arête basculable) dans toutes triangulation de ces 5 points.

(On pourra faire des cas selon le nombre de points sur l'enveloppe convexe).

2.6

Montrer qu'il existe une triangulation de n'importe quel ensemble de n points avec au moins $\frac{n}{2} - 1$ points de degré impair.

(On pourra numéroter les points selon l'ordre en x : x $p_0 <_x p_1 <_x \ldots p_n$ et considèrer les bandes verticales définies par les droites verticales passant par les points d'indices multiples de 4.))

3 Simplification de maillages et mesure d'erreur

On a vu en cours un algorithme de simplification de maillages triangulaires de surfaces par contraction d'arêtes, qui mesure l'erreur de contraction d'une arête comme la somme des carrés des distances à une collection de plans.

3.1 Plans

Etant donnée une arête candidate à la contraction, quels sont ces plans ? Faire un schéma.

3.2 Equation d'un plan

Considérons un plan h_i (dans l'espace euclidien de dimension 3) défini par un vecteur normal unité $v_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ et un offset d_i (distance signée à l'origine). Donnez l'équation normale du plan.

3.3 Distance

Exprimez la distance signée d'un point arbitraire x au plan h_i, puis le carré de cette distance.

3.4 Somme des carrés des distances

Exprimez la somme des carrés des distances d'un point x à une collection de plans H :

$$E_H(x) = \sum_{h_i \in H} d^2(x, h_i).$$

3.5 Quadrique fondamentale

Mettez l'expression de l'erreur sous la forme $E_H(x) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$, où $\mathbf{x}^T = (x^T, 1)$ et $\mathbf{Q}$ est appelée la matrice fondamentale de la fonction d'erreur E_H (donner les coefficients de cette matrice 4-par-4 symétrique).

3.6 Graphe de la fonction d'erreur

La fonction d'erreur $E(x) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ est une fonction quadratique non-négative et non bornée. Quelle est génériquement la forme de son graphe ? plus formellement, la forme de la pré-image d'une valeur constante d'erreur $\epsilon, E^{-1}(\epsilon)$. Illustrer différentes formes de graphe en fonction de la géométrie locale au voisinage d'une arête.

3.7 Cas dégénérés

Existe-t-il des versions dégénérées du graphe d'erreur ? dans quels cas ? raisonner en terme d'analyse des valeurs propres de Q, ou des normales aux plans et de la dimension de l'espace engendré par ces dernières (respectivement 3D, 2D et 1D).

3.8 Position optimale

Comment trouve-t-on le point qui minimise l'erreur $E(x)$? Dans quel cas est-il unique ?

3.9 Bords

Que se passe-il si on contracte une arête du bord ? peut-on imaginer une solution en modifiant la quadrique fondamentale ?

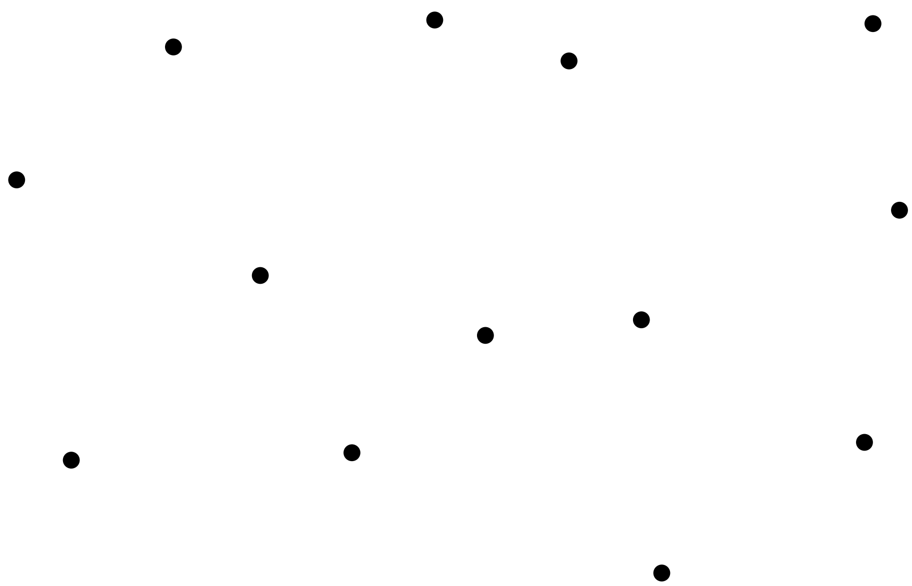

FIG. 3 – Pour la triangulation

Géométrie algorithmique, examen M2, 6 février 2009, correction

1 Losange vide

1.1

C'est les losanges ayant un point de S sur leur bord.

1.2

Il suffit de faire l'enveloppe convexe des points, les losanges vides ont leur coté supérieur droit qui doit éviter l'enveloppe convexe, les cas limites sont donnés par les droites support de l'enveloppe convexe, les 3 autres cotés du losange s'obtiennent par symétrie par rapport aux axes de coordonnées.

La taille de l'enveloppe convexe est $O(n)$.

1.3

A chaque point (x, y) on associe le point $(|x|, |y|)$, il est équivalent pour un losange de contenir (x, y) ou son transformé dans le premier quadrant $(|x|, |y|)$. Maintenant on fait l'enveloppe convexe des points envoyés dans le premier quadrant comme à la question précédente.

2 Triangulation et degré

2.1

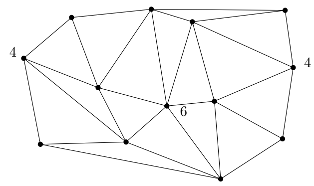

Fig. 4 – Triangulation avec 3 sommets de degré impair

2.2

La somme des degré est invariante selon la triangulation, ici elle est impaire, donc au moins un sommet a degré impair.

2.3

Un triangle avec un point dedans : 4 sommets de degré 3.

Un triangle avec un triangle dedans : 6 sommets de degré 4.

2.4

Deux sommets ont leur degré qui diminue de 1 et deux sommets ont leur degré qui augmente de 1. Toutes les parités changent.

$n_\delta + n'_\delta = 4$

2.5

5 points sur l'enveloppe convexe. Toute arête interne est basculable.

4 points sur l'enveloppe convexe. On peut toujours basculer une diagonale du quadrilatère enveloppe convexe et une arête issue du point central.

3 points sur l'enveloppe convexe. L'arête reliant les deux points a et b interne est toujours présente dans la triangulation. Le quadrilatère formé par a, b et les deux points du même coté de la droite ab est basculable.

2.6

Dans chaque bande verticale on a 5 points (les points multiples de 4 sont communs a deux bandes).

On fait l'enveloppe convexe dans chaque bande verticale, et on triangule et l'intérieur de ces enveloppes convexes. Dans chaque enveloppe convexe on a un quadrilatère basculable.

On considère maintenant les quadrilatères de gauche à droite.

Si le quadrilatère a au moins deux sommets de degré impair, on passe au suivant.

Si le quadrilatère a 0 ou 1 sommets de degré impair, on bascule (obtenant ainsi 4 ou 3 sommets de degré impair) et on passe au suivant. Attention le sommet partagé avec le quadrilatère précédent a puu passer de impair à pair, néanmoins le nombre total de sommets de degré impair est globalement de 2 par quadrilatère visité. Le -1 de la formule est là pour absorber les derniers points ne formant pas un quadrilatère.