Géométrie algorithmique, examen M2, 8 février 2010, énoncé

1 k-Ring

Étant donné un ensemble S de n points du plan en position générale et un point $q \in S$ on appelle le k-Ring de q, noté $R_k(q)$ l'ensemble des points de S dont la distance dans la triangulation de Delaunay $DT(S)$ à q est inférieure ou égale à k (la distance de p à q est ici le nombre minimal d'arêtes de $DT(S)$ pour aller de p à q).

En d'autres termes :

$$R_0(q) = \{q\}$$

$$R_1(q) = \{q\} \cup \{p \in S; p \text{ est voisin de } q \text{ dans } DT(S)\}$$

$$R_i(q) = R_{i-1}(q) \cup \{p \in S; p \text{ est voisin d'un point de } R_{i-1}(q) \text{ dans } DT(S)\}$$

$|R_k(q)|$ désigne la taille de $R_k(q)$.

Dans toutes les questions, on est essentiellement intéressé par un ordre de grandeur quand $n \to \infty$, pas par la valeur exacte.

1.1

Quel est la valeur maximale de $|R_k(q)|$ en fonction de k et n ? Décrire l'ensemble S permettant d'atteindre cette valeur.

1.2

Quel est la valeur minimale de $|R_k(q)|$ en fonction de k et n ? Décrire l'ensemble S permettant d'atteindre cette valeur.

1.3

Quelle est la moyenne de $|R_1(q)|$ quand q est choisi au hasard dans S, dans le cas le pire pour S.

1.4

Quelle est la moyenne de $|R_2(q)|$ quand q est choisi au hasard dans S, dans le cas le pire pour S ?

1.5

Quelle est la moyenne de $|R_1(q)|^2$ quand q est choisi au hasard dans S, dans le cas le pire pour S ?

1.6

Quelle est la moyenne de $\min(|R_1(p)|^2, |R_1(q)|^2)$ quand p et q sont choisis indépendamment au hasard dans S ?

Indication : trouver une forme simple de « $\min(a, b) \cdot \max(a, b)$».

1.7

Maintenant on veut calculer la taille de $R_1(p)$ pour tout les points p de S. On suppose que (comme dans CGAL) la triangulation est augmentée d'un point à l'infini p_∞, ce qui évite d'avoir à gérer le bord d'une manière spéciale, et on considère que $p_\infty \in S$.

On suppose que chaque point p de S est muni d'un champ entier p.`ring1`. Écrire en pseudo-code un algorithme permettant de calculer dans le champ p.`ring1` la taille de $R_1(p)$.

Rq : *Pour v parcourant les les voisins de p dans $DT(S)$* ou encore *Pour p parcourant S* ou encore *Pour chaque triangle t de $DT(S)$* sont des lignes de pseudo-code acceptables.

1.8

Étudier la complexité de cet algorithme.

1.9

On va noter $T_k(q)$ l'ensemble des triangles de $DT(S)$ ayant leur 3 sommets dans $R_k(q)$.

On veut calculer la taille de $T_2(p)$ pour tout les points p de S.

On suppose qu'à chaque point p de S est ajouté un champ entier p.`t_ring2`. Écrire en pseudo-code un algorithme permettant de calculer dans le champ p.`t_ring2` la taille de $T_2(p)$.

Rq : Pour chaque triangle à compter, se demander quel est le nombre de ses sommets à distance 0, 1 ou 2 de p.

1.10

Étudier la complexité de cet algorithme.

Géométrie algorithmique, examen M2, 8 février 2010, correction

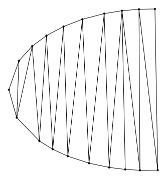
1 k-Ring

1.1

$\forall n, |R_0(q)| = 1$, $\forall k, n \exists S |R_k(q)| = n$, exemple en roue de chariot, q au moyeu de la roue.

1.2

$$\forall n, |R_0(q)| = 1$$
$$\forall n, |R_1(q)| \geq 3$$
$$\forall n, \forall k \geq 2 |R_k(q)| \geq \min(2k+1, n)$$



1.3

Le grand classique, $|R_1(q)| = 1 + d^\circ(q)$ (le 1 est pour q lui même).

$$E(|R_1(q)|) = \frac{1}{n} \sum_{q \in S} (1 + d^\circ(q)) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{q \in S} d^\circ(q) \leq 1 + 6 = 7$$

Pour la valeur exacte on peut introduire h le nombre de points de l'enveloppe convexe et on a $E(|R_1(q)|) = \frac{7n-6-2h}{n}$ et donc $5 \leq E(|R_1(q)|) \leq 7$.

1.4

$$E(|R_2(q)|) = \frac{1}{n} \sum_{q \in S} |R_2(q)| \leq \frac{1}{n} \sum_{q \in S} n = n$$

Cette valeur est atteinte dans le cas de points sur la demi parabole $y = x^2; x > 0$. On a $\forall q, R_2(q) = S$.

1.5

Par convexité de la fonction $y = x^2$, on a que la moyenne de carrés est supérieure au carré de la moyenne. On en déduit

$$E(|R_1(q)|^2) \geq E(|R_1(q)|)^2 \geq 49$$

Par ailleurs

$$E(|R_1(q)|^2) = \frac{1}{n} \sum_q |R_1(q)|^2 \leq = \frac{1}{n} \sum_q n |R_1(q)| \leq n$$

Cette valeur est atteinte (à une constante près) dans le cas de points sur la demi parabole $y = x^2; x > 0$: on a $d^\circ(q_1) = n - 1$ et $\forall i \neq 1 d^\circ(q_1) \leq 3$, la somme des carrés des degrés est de l'ordre de n^2, la moyenne de l'ordre de n.

1.6

$$\begin{aligned}
E(\min(|R_1(p)|^2, |R_1(q)|^2)) &= \frac{1}{n^2} \sum_{p \in S} \sum_{q \in S} \min((1 + d^\circ(p))^2, (1 + d^\circ(q))^2) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{p \in S} \sum_{q \in S} \min(1 + d^\circ(p), 1 + d^\circ(q)) \cdot \min(1 + d^\circ(p), 1 + d^\circ(q))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n^2}\sum_{p\in S}\sum_{q\in S}\min(1+d^\circ(p),1+d^\circ(q))\cdot\max(1+d^\circ(p),1+d^\circ(q)) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{p\in S}\sum_{q\in S}(1+d^\circ(p))\cdot(1+d^\circ(q)) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{p\in S}1+d^\circ(p)\right)\cdot\left(\sum_{q\in S}1+d^\circ(q)\right)\leq\frac{1}{n^2}(7n-6-2h)^2\leq 49
\end{aligned}$$

1.7

Pour chaque sommet p de $DT(S)${
p.ring1 = 1 ;
Pour v parcourant les les voisins de p dans $DT(S)${
p.ring1 += 1 ;
}
}

1.8

La complexité est proportionnelle à $\sum_{p\in S} d^\circ(p) = 6n-12$. Cette relation est obtenue en considérant la relation d'Euler $t-a+n=2$ et la relation $\sum_{p\in S} d^\circ(p) = 3t = 2a$ (ici on considère que le sommet infini appartient à S, toutes les faces sont des triangles).

1.9

Si δ est le degré de p δ triangles de sommet p ont un sommet à distance 0 et deux sommets à distance 1. δ triangles (voisins des précédents) ont un sommet à distance 2 et deux sommets à distance 1. Les autres triangles ont un sommet à distance 1 et deux sommets à distance 2.

Si on additionne le degré des sommets à distance 1, les triangles de la première et deuxième catégorie sont comptés deux fois, et ceux de la troisème une seule.

On suppose que le champ $ring1$ est déjà calculé (et contiens donc $\delta+1$).

Pour chaque sommet p de $DT(S)${
p.t_ring2 = - 2 * (p.ring1 - 1) ;
Pour v parcourant les les voisins de p dans $DT(S)${
p.t_ring2 += (v.ring1 - 1) ;
}
}

1.10

La complexité est encore $\sum_{p\in S} d^\circ(p) = O(n)$.