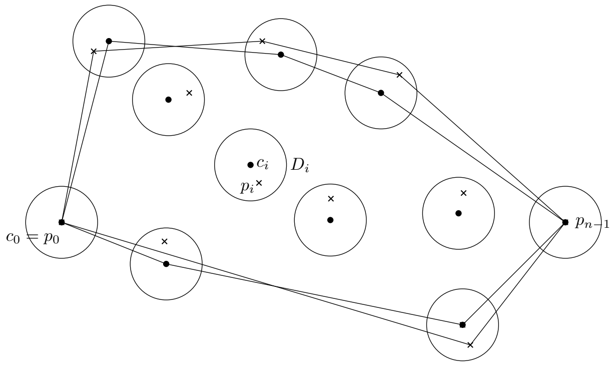
Géométrie algorithmique, examen M2, 7 février 2011, énoncé

Des points dans des disques



Remarques : **Il faut faire des dessins (à chaque question ou presque).** Les deux parties sont indépendantes. Les questions $\star$ sont difficiles, toute indication intéressante sera prise en compte.

1 Enveloppe convexe

Notations

S est un ensemble de n disques disjoints de rayon 1 : $S = \{D_i, 0 \leq i < n\}$.
D_i a pour centre c_i et on note $C = \{c_i, 0 \leq i < n\}$.
$P = \{p_i, 0 \leq i < n\}$ est un ensemble de points dans ces disques : $p_i \in D_i$.
On notera (x_i, y_i) les coordonnées de p_i et (a_i, b_i) celles de c_i.
Pour tout ensemble de points X, on note

- $CH(X)$ l'enveloppe convexe de X,
- $CH^+(X)$ l'enveloppe convexe supérieure et
- $CH^-(X)$ l'enveloppe convexe inférieure.

Jusqu'à la question 1.5 comprise, on suppose que l'on a $c_0 = (0,0)$, $c_{n-1} = (A, 0)$**, où** A **est un réel positif, et** $\forall\ 1 \leq i < n-1, 0 \leq a_i \leq A$**.**

1.1

Si $a_i < a_j$, peut-on déduire quelque chose sur l'ordre en x de p_i et p_j ?

1.2

Écrire le test d'orientation de c_0, c_{n-1}, p_i (le résultat doit être : direct, indirect ou aligné).

1.3

Si c_i est un sommet de $CH^+(C)$, peut-on déduire que p_i est un sommet de $CH^+(P)$?

1.4

Si $a_i < a_j$, et si p_i et p_j sont des sommets de $CH^+(P)$, peut-on déduire que p_i est à gauche de p_j sur $CH^+(P)$?

- Si non, justifier et donner une condition supplémentaire sur les coordonnées pour que faire cette déduction soit possible.
- Si oui, justifier. Est-ce toujours vrai si on regarde l'ordre sur $CH(P)$ (au lieu de CH^+) ?

Indication : pour simplifier, vous pouvez supposer dans un premier temps que p_0, p_i et p_{n-1} sont fixés ; puis seulement que p_0 et p_{n-1} sont fixés.

1.5

Dans cette question, on suppose que si $a_i < a_j$ et si p_i et p_j sont des sommets de $CH^+(P)$, on peut en déduire que p_i est à gauche de p_j sur $CH^+(P)$ (soit vous avez répondu à la question 1.4 que c'était toujours vrai, soit vous avez imposé une condition supplémentaire sur la position des points pour que celà le soit).

Proposer un algorithme de prétraitement de C permettant de trouver $CH^+(P)$ en temps $O(n)$. Quel est la complexité du prétraitement ?

1.6 $\star$

À présent on enlève les hypothèses sur la position des points, on suppose seulement que les disques sont disjoints.

Peut-on réutiliser les résultats précédents pour concevoir un prétraitement de C permettant de calculer $CH(P)$ en $O(n)$?

2 Triangulation de Delaunay

Notations

S est un ensemble de n disques disjoints de rayon 1 : $S = \{D_i, 0 \leq i < n\}$. Chaque disque D_i contient deux points, et on décide à pile ou face qu'un des ces deux points est p_i et que l'autre est q_i.

$P = \{p_i, 0 \leq i < n\}$ et $Q = \{q_i, 0 \leq i < n\}$.

On note $DT(X)$ la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points X.

2.1

Dessiner un exemple dans lequel p_i et p_j sont voisins dans $DT(P)$ et q_i et q_j ne sont pas voisins dans $DT(Q)$.

2.2

Dans cette question, $n = 4$, $S = \{D_0, D_1, D_2, D_3\}$.

Décrire (et dessiner) un cercle Γ tel que l'appartenance du centre c_3 de D_3 au complémentaire de Γ soit une condition suffisante d'existence de $p_0p_1p_2$ dans $DT(P)$ (ou de manière équivalente de $q_0q_1q_2$ dans $DT(Q)$).

2.3

On considère les triangulations $DT(P)$, $DT(P \cup \{q_i\})$ et $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$.

Montrer qu'il existe p_k tel que p_k est voisin de q_i dans $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$ et p_k est voisin de p_i dans $DT(P)$.

2.4

Si i est choisi au hasard entre 0 et n, quelle est la complexité de passer de $DT(P)$ à $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$?

2.5

Quel est la complexité de passer de $DT(P)$ à $DT(Q)$?

2.6 $\star$

Maintenant P et Q ne sont plus construits en tirant à pile ou face, mais un adversaire choisit quel point va dans P et quel point va dans Q. Les résultats restent-ils valables ?
(si non, à quel moment dans les questions 2.1 à 2.5 avez-vous utilisé le fait que P et Q étaient construits à pile ou face ?)

Géométrie algorithmique, examen M2, 7 février 2011, correction

1 Enveloppe convexe

1.1

On ne peut évidemment rien déduire, il suffit de prendre D_i et D_j l'un au dessus de l'autre.

1.2

$orient(p_0, p_2, p_i) = \text{sign} \begin{vmatrix} A & x_i \\ 0 & y_i \end{vmatrix} = \text{sign}(y_i)$
1=direct, -1=indirect, 0=aligné.

1.3

On ne peut évidemment rien déduire, il suffit de prendre $a_i = 1/2$ tous les autres points en dessous de $c_0 c_{n-1}$ et p_i pourra être au dessus ou en dessous de $c_0 c_{n-1} = p_0 p_{n-1}$.

1.4

On ne peut rien déduire.

Si D_i est très haut (par exemple, $c_i = (n/2, n^2)$) alors il est possible de placer D_j très haut pour qu'il déborde des deux cotés de la pointe du triangle $p_0 p_{n-1} p_i$ (par exemple $c_j = (n/2 + 1/2, n^2 - 1)$ en prenant $c_i = p_i$ et $p_j = (n/2 - 1/2, n^2 - 1)$. On a notre contre example.

Si on interdit au points d'être trop haut, ceci ne peut se produire. Plus précisément, si l'angle en p_i du triangle $p_0 p_1 p_i$ est supérieur à $\pi/3$ alors un disque D_j ne peut pas déborder des deux cotés de la point du triangle.

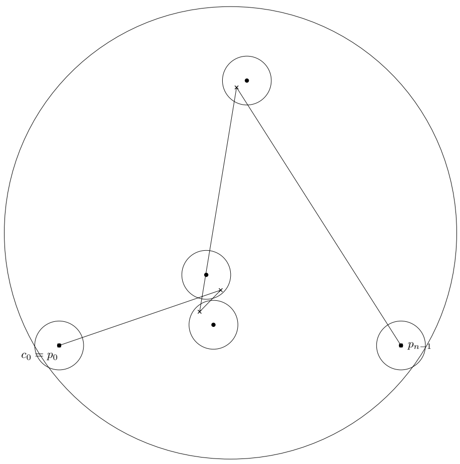
Si p_0 et p_{n-1} sont fixés, on a donc un cercle (le cercle circonscrit au triangle équilatéral de base $p_0 p_{n-1}$) qui donne les positions admissibles pour p_i. Le cercle pour c_i a le même centre et est de rayon diminué de 1.

Ensuite il faut faire l'intersection de tous les cercles ainsi défini, quelque soit la position de p_0 et p_{n-1} dans D_0 et D_{n-1}.

1.5

On trie les points de C en x ceci prends un temps $O(n \log n)$. On renumérote les points de C pour que l'ordre en x corrresponde à l'ordre des indices. Puis on examine les points de P dans l'ordre des indices, on sait d'après la question précédente que les points doivent apparaître dans cet ordre sur l'enveloppe convexe. A chaque nouveau point p_j on vérifie qu'il est à droite du précédent, puis on fait Graham comme d'habitude.

Attention, Graham direct ne marche pas comme le montre la figure.



1.6

On calcule $CH(C)$, on en extrait le diamètre de $CH(C)$ et on appelle c_0 et c_{n-1} ses deux extrémités. On fait le changement de coordonnées pour que $c_0 = (0,0)$, $c_{n-1} = (A,0)$.

Alors les conditions sont presque vérifiées, la condition $\forall\ 1 \leq i < n-1, 0 \leq a_i \leq A$ est vérifiée. Celle de la question 1.4 ne l'est pas tout à fait, mais la zone autorisée pour le diamètre et non autorisée pour 1.4 est petite. On peut traiter à part les points dans cette zone.

2 Triangulation de Delaunay

2.1

4 disques centrés aux 4 coins d'un carré de coté 3, $p_0 = q_0$, $p_2 = q_2$ aux coins d'une diagonale du carré. p_1 et p_3 un peu vers l'intérieur du cercle circonscrit au carré q_1 et q_3 un peu vers l'intérieur du cercle circonscrit au carré.

2.2

On construit le cercle Γ' tangent à D_0, D_1 et D_2 qui contient D_0 et D_1 et qui ne contient pas D_2. Γ' est centré sur la médiatrice de c_0c_1.

Si D_3 est a l'extérieur de Γ' alors quelque soit la position des q_i dans leur cercle, Γ' sera vide et q_0q_1 sera de Delaunay.

Γ est donc de même centre que Γ' avec un rayon augmenté de 1.

2.3

Dans la triangulation $DT(P \cup \{q_i\})$, p_iq_i est une arête de Delaunay (c'est les seuls points dans D_i et on peut trouver un cercle inclus dans D_i passant par p_i et q_i). Il y a donc un point p_k tel que $p_iq_ip_k$ est un triangle de Delaunay de $DT(P \cup \{q_i\})$. Si on supprime p_i, q_ip_k reste une arête de Delaunay de $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$, si on supprime q_i, p_ip_k reste une arête de Delaunay de $DT(P)$,

2.4

p_i est un point aléatoire de P, son degré moyen est donc inférieur à 6 dans $DT(P)$.

De même q_i est un point aléatoire de $P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\}$ (car on a choisit au hasard dans D_i qui était p_i et qui était q_i) son degré est donc 6 aussi.

Il n'y a pas besoin de localiser q_i quisque l'on connait déjà la position de p_i, on peut donc insérer q_i et supprimer p_i en temps constant en moyenne.

2.5

On prends les points dans un ordre aléatoire, et on les bouge chaqu'un à leur tour de leur place dans P à leur place dans Q.

La question précédente s'applique. Complexité $O(n)$.

2.6

On s'en sert au 2.4. Sinon q_i n'est plus aléatoire dans $P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\}$.

Par exemple si on prends P des points sur un cercle de rayon n et Q sur un cercle de rayon $n-1$ alors quelque soit i le degré de q_i dans $DT(P \cup \{q_i\} \setminus \{p_i\})$ est $n-1$.