**Géométrie algorithmique, examen M2, 2h, 27 février 2012, énoncé**

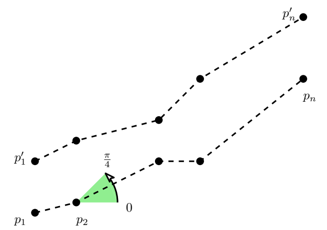
| |
|---|
| Remarques : **Il faut faire des dessins (à chaque question ou presque).**<br>Les trois parties sont indépendantes. |

# 1 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points ci dessous (sur la feuille jointe).

# 2 Delaunay de deux chaines monotones

Soit $S$ un ensemble de $2n$ points du plan vérifiant :
- $S = \{p_1, p_2, \ldots p_n\} \cup \{p'_1, p'_2, \ldots p'_n\}$
- $p_i$ et $p'_i$ ont la même abscisse $x_i$
- $p'_i$ est au dessus de $p_i$ ($y_i \leq y'_i$)
- les points sont triés en $x$ : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$,
- Les segments $p_ip_{i+1}$ ainsi que $p'_ip'_{i+1}$ font un angle avec l'horizontale entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.




## 2.1 Arêtes et triangles de Delaunay

### 2.1.1

L'arête $p_ip_{i+1}$ est elle nécessairement une arête de Delaunay ? Si oui le démontrer, si non donner un contre exemple (faire un dessin).

### 2.1.2

Même question pour $p'_ip'_{i+1}$.

### 2.1.3

Même question pour $p_ip'_i$.

### 2.1.4

Dans la triangulation de Delaunay de $S \setminus \{p_i, p'_i\}$, donner la description d'un triangle dont le cercle circonscrit contienne surement $p_i$.

## 2.2 Degré d'un point

On va étudier le degré de $p_i$ dans la triangulation de Delaunay de $S$.

#### 2.2.1

Combien de points $p_j$ peuvent être voisin de $p_i$ ((asymptotiquement) en fonction de $n$), dessiner un example réalisant cette borne.

#### 2.2.2

Quel est le degré minimal d'un point intérieur à l'enveloppe convexe ?

#### 2.2.3

Donner une borne supérieure pour la valeur de la moyenne de $d^\circ(p_i) + d^\circ(p'_i)$ la somme des degrés de deux points de même abscisseLa moyenne est sur le choix de $i$ (chaque paire de points a une probabilité $\frac{1}{n}$ d'être choisie).

### 2.3 Algorithme

On va maintenant étudier la complexité $f(n)$ de l'algorithme d'insertion randomisé pour trianguler un tel ensemble de points.

#### 2.3.1

Supposons que l'on ai triangulé l'ensemble $S \setminus \{p_i, p'_i\}$, décrire brièvement l'algorithme d'insertion de $p_i$ et $p'_i$ dans la triangulation et donner sa complexité.

#### 2.3.2

Si $i$ a été choisi aléatoirement que peut-on dire de cette complexité.

#### 2.3.3

Donner une équation de récurrence pour $f$ la complexité de l'algorithme complet de construction et en déduire la valeur de $f$.

## 3 Prédicat

On considère les 4 points suivants : $O = (0, 0)$, $p = (u, 0)$, $q = (v, v)$ et $r = (x, y)$. Faire un dessin avec $u$, $v$, $x$ et $y$ positifs.

### 3.1

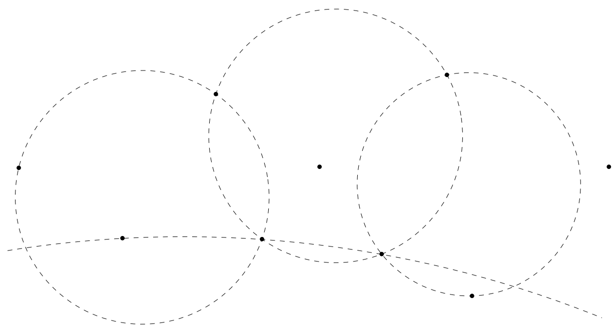
Écrire le prédicat permettant de tester si le point $r$ est à l'intérieur du cercle passant par $Opq$ sous la forme du signe d'un polynôme en $u$, $v$, $x$ et $y$. Quel est le degré de ce polynôme ?

### 3.2

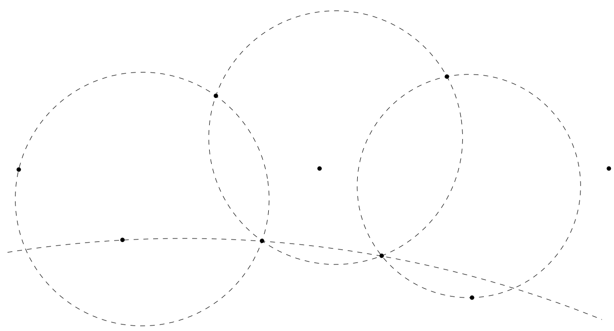
Si les nombres $u$, $v$, $x$ et $y$ sont des entiers stockés dans des `double` (nombres double précision de la machine). Donner un nombre $M$ tel que si $0 \leq u, v, x, y \leq M$ le polynôme sera évalué exactement par l'arithmétique double précision.

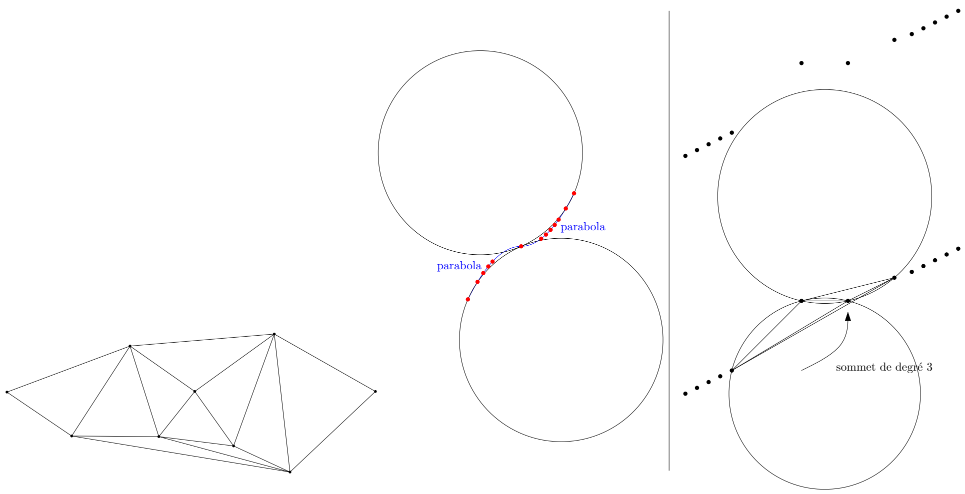
**Nom :**

## 2 Triangulation de Delaunay



2ème essai en cas de rature !






**Géométrie algorithmique, examen M2, 27 février 2012, correction**

# 1 Triangulation de Delaunay

Figure de gauche.

# 2 Delaunay de deux chaines monotones

## 2.1

### 2.1.1

Le cercle de passant par $p_i$et $p_{i+1}$ avec une tangente verticale en $p_i$ peut être découpé en 2 parties par la verticale passant par $p_{i+1}$. La partie entre $p_i$ et $p_{i+1}$ est vide car il n'y a pas de points dans cette bande. À cause de la contrainte d'angle, la tangente au cercle en $p_{i+1}$ aura une pente négative, et donc la partie du cercle à droite de $p_{i+1}$ est vide car cette portion du cercle se situe au dessous de $p_{i+1}$ et les points à droite de $p_{i+1}$ sont au dessus de $p_{i+1}$.

Le cercle est vide, donc $p_ip_{i+1}$ est de Delaunay.

### 2.1.2

Non.

Placer trois points $p_1p_2p_3$ pour que ce triangle soit direct, puis placer $p_1'p_2'p_3'$ au dessus du cercle de ce triangle et $p_2p_2'$ ne sera pas une arête de Delaunay.

### 2.1.3

En faisant le même raisonnement que pour $p_ip_{i+1}$ sur notre ensemble de points tournés de $\pi$ on obtiens le résultat pour $p_i'p_{i+1}'$.

### 2.1.4

Non.

Placer trois points $p_1p_2p_3$ pour que ce triangle soit direct, puis placer $p_1'p_2'p_3'$ au dessus du cercle de ce triangle et $p_2p_2'$ ne sera pas une arête de Delaunay.

### 2.1.5

Un des deux triangles incidents à $p_{i-1}p_{i+1}$ doit contenir $p_i$ dans son cercle circonscrit.

En effet le cercle passant par $p_{i-1}$ et $p_{i+1}$ avec une tangente verticale en $p_{i-1}$ est vide comme signalé ci dessus. Supposons que $p_i$ soit au dessus de $p_{i-1}p_{i+1}$, alors le cercle circonscrit au triangle de Delaunay contiendra $p_i$, si $p_i$ est en dessous on utilisera le triangle de Delaunay en dessous de $p_{i-1}p_{i+1}$.

### 2.2

#### 2.2.1

Borne inférieure en $\Omega(n)$.
L'exemple (Figure centrale) réalise $n-1$, les points $p'_i$ peuvent être ajoutés plus haut.

#### 2.2.2

On peut réaliser 3comme dans la figure de droite, qui est le minimum pour tout ensemble de points (les angles d'un triangle sont strictement inférieurs à $\pi$ , il en faut donc au moins 3 pour faire $2\pi$ autour d'un sommet).

#### 2.2.3

C'est un grand classique de montrer que $\sum_i (d^\circ(p_i) + d^\circ(p'_i)) \leq 6 \cdot 2n$ et la valeur moyenne recherchée est donc inférieure à 12.

### 2.3

#### 2.3.1

On peut maintenir pour chaque point $p_i$ un pointeur vers une des triangles incident à l'arête $p_{i-1}p_{i+1}$. On peut ainsi trouver directement un triangle en conflit avec $p_i$ permettant d'éviter de localiser le point dans la triangulation. On peut alors rechercher les autres triangles en conflit et étoiler le trou ainsi formé en un temps proportionnel au degré du point inséré. On procède symétriquement pour $p'_i$.
La complexité est $d^\circ(p_i) + d^\circ(p'_i)$.

#### 2.3.2

La complexité moyenne d'insertion de la dernière paire de points est une constante $A$ puisque le coût moyen est constant (12).

#### 2.3.3

On obtiens donc $f(n) = A + f(n-1)$ qui nous donne $f(n) = nA$.

## 3 Prédicat

### 3.1

On peut développer le déterminant $\begin{vmatrix} u & v & x \\ 0 & v & y \\ u^2 & 2v^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$ et simplifier par $uv$, ou calculer le centre du cercle $(\frac{u}{2}, v - \frac{u}{2})$ et le carré de sa distance à $p$. $r$ est dans le cercle si $x^2 + y^2 - ux - (2v-u)y < 0$. C'est un polynôme de degré 2.

### 3.2

Si les nombres sont sur $b$ bits alors on obtiens comme nombre de bits pour représenter les expressions suivantes :
$x^2$ sur $2b$ bits
$x^2 + y^2$ sur $2b+1$ bits
$x^2 + y^2 - ux$ sur $2b+1$ bits(plus le signe)
$2v - u$ sur $b+2$ bits
$(2v-u)y$ sur $2b+2$ bits
$x^2 + y^2 - ux - (2v-u)y$ sur $2b+3$ bits.
Pour que $2b+3$ soit égal à 53 le nombre de bits de la mantisse d'un `double` on doit prendre $b = 25$ et donc $M = 2^{25} = 3\,355\,432$.