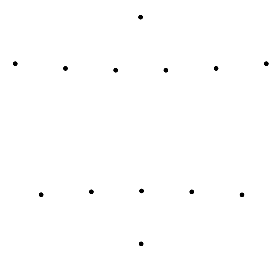
Géométrie algorithmique, examen M2, 2h, 11 février 2013, énoncé

Remarques : **Il faut faire des dessins (à chaque question ou presque).**
Les ? parties sont indépendantes.

1 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points ci dessous (sur la feuille jointe).



2 Triangulation de Delaunay (encore)

Soit S un ensemble de n points dans le plan et q un point du plan (n'appartenant pas à S).

2.1

Soit $p \in S$ tel que $||pq|| < ||qw||$ pour tous les voisins w de p dans la triangulation de Delaunay de S. Démontrer que p est le plus proche voisin de q dans S.

Indication : on pourra regarder le cercle de centre q passant par p.

2.2

On a maintenant un sommet $v \in S$ et on applique l'algorithme suivant :

```
meilleur=v;precedent=0;
Tant que (meilleur!=precedent){
    precedent=meilleur;
    Pour chaque voisin w de meilleur dans DT(S){
         if (||wq||< ||meilleur q||) meilleur = w;
    }
}
retourner meilleur;
```

Montrer que cet algorithme termine et retourne le plus proche voisin de q.

2.3

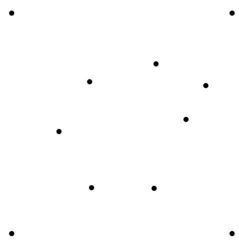
Dans le cas le pire pour S quelle est la complexité de cet algorithme. (le démontrer).

2.4

Donner un exemple réalisant le cas le pire (à une constante près).

3 Hexagones

3.1



Dessiner (sur la feuille jointe) un découpage de l'enveloppe convexe des points, dont les sommets appartiennent à l'ensemble de points ci dessus en utilisant exclusivement des hexagones (pas forcément convexes).

3.2

En notant n le nombre de points, h le nombre d'hexagones, k la taille de l'enveloppe convexe et a le nombre d'arêtes, trouver deux relations liant ces grandeurs. En déduire h et a en fonction de n et k.

3.3

Donner une condition nécessaire sur n pour qu'un carré soit hexagonalisable (les sommets du carrés font partie de l'ensemble de points, les $n-4$ autres points sont strictement à l'intérieur du carré).

4 Randomisation

4.1

Soit S un ensemble de n points dans le plan et q un point choisi au hasard dans S. Quel est l'espérance du degré de q dans la triangulation de Delaunay de S.

4.2

On insert les points de S en mettant à jour incrémentalement la triangulation.

Quel est le nombre maximal de triangles créés au cours de l'algorithme complet dans le cas le pire (à une constante près) ? Donner un exemple réalisant cette borne.

4.3

Quel est l'espérance du nombre de triangles créés si les points sont insérés dans un ordre aléatoire (à une constante près) ?

4.4

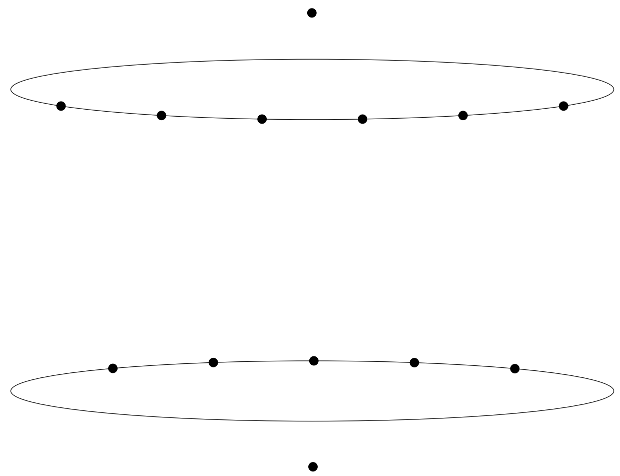
On a maintenant n points rouges et k points bleus. Donner une borne sur le degré d'un point bleu choisi au hasard.

4.5

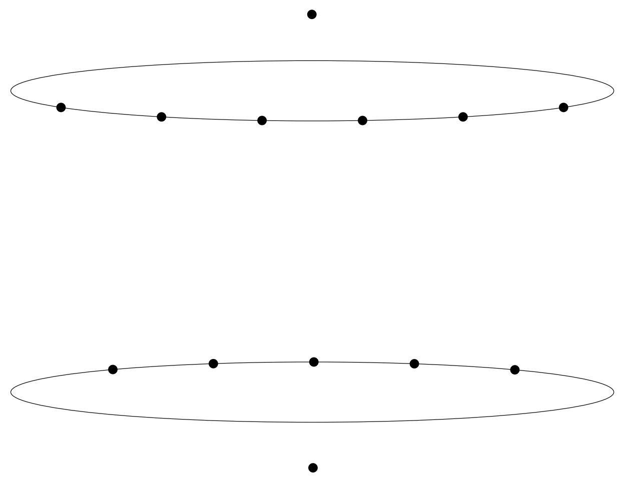
On a maintenant n points rouges et n points bleus. On insère dans un ordre aléatoire les n rouges puis dans un ordre aléatoire les n bleus. Quel est l'espérance du nombre de triangles créés (à une constante près) ? Donner un exemple réalisant cette borne.

Nom :

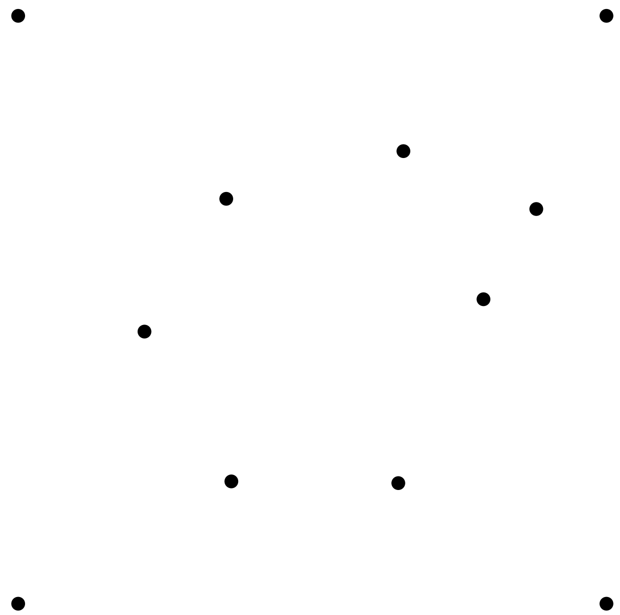
1 Triangulation de Delaunay



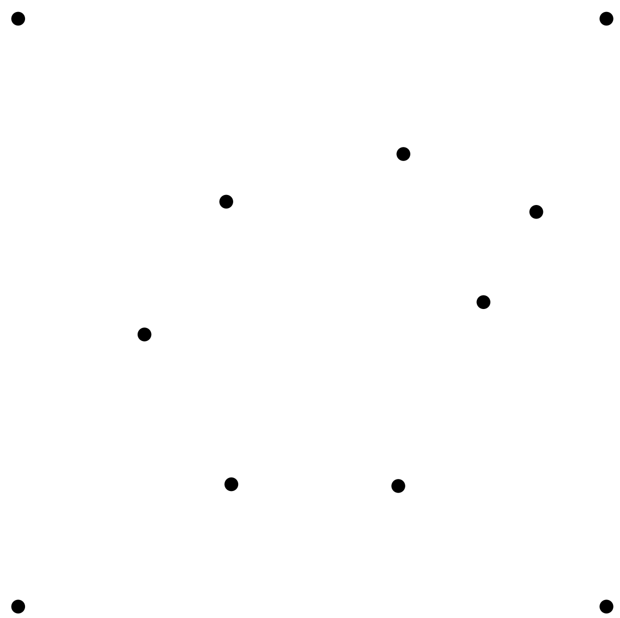
2ème essai en cas de rature !



2 Hexagones

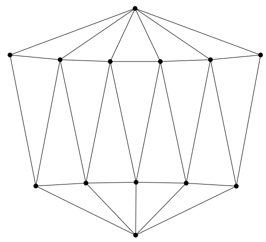


2ème essai en cas de rature !



Géométrie algorithmique, examen M2, 11 février 2013, correction

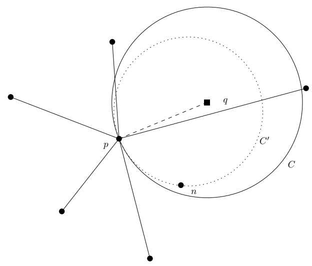
1 Triangulation de Delaunay



2 Triangulation de Delaunay (encore)

2.1

D'après les hypothèses, le cercle C contiens pas de voisins de p. Supposons qu'il existe $n \in S$ avec $||qn|| < ||qp||$ alors le cercle C' passant par n et p et tangent en p à C est inclus dans C.
Soit C' est vide et pn est une arête de Delaunay ce qui contredit l'hypothèse que C ne contiens pas de voisin de p. Soit C' n'est pas vide et en réduisant C' en restant tangent en p à C on va trouver un voisin de Delaunay de p qui contredira l'hypothèse.



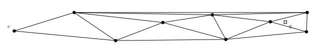
2.2

D'après la question précédente, si la boucle "Pour" ne trouve pas de meilleur réponse dans les voisins de v c'est que c'est le plus proche voisin. Comme chaque nouveau candidat (stocké dans la variable `meilleur` est plus proche de q que le précédent, on ne peut pas boucler.

2.3

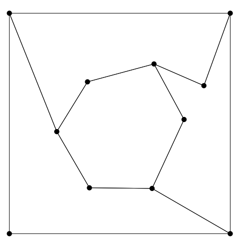
Comme dit ci dessus, on améliore la distance à chaque passage dans la boucle "tant que", on effectue donc celle ci au plus une fois pour chaque point v de S, la complexité de la boucle "pour" est bornée par le degré de v. La complexité totale est donc le classique $\sum_{v \in S} degre(v) \leq 6n$.

2.4



3 Hexagones

3.1



3.2

Euler : $h + 1 - a + n = 2$
En dupliquant les arêtes : $2a = 6h + k$
2*Euler+substitution de $2a$: $2h + 2 - 6h - k + 2n = 4$

soit : $h = \frac{2n-2-k}{4}$
et : $a = h - 1 + n = \frac{6n-6-k}{4}$

3.3

$k = 4$, il faut que $2n - 2 - 4$ soit congru à 1 modulo 4 et positif donc que n soit impair (n est supérieur à 4 puisqu'il contient les 4 points du carré.

4 Randomisation

4.1

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in S} degre(v) \leq 6$$

4.2

C'est $\Omega(n^2)$ en insérant des points sur la demi parabole dans le sens de la convexité croissante.

4.3

Quand on insère le k-ème point, c'est just un point au hasard parmi k. Son degré est donc inférieur à 6. En sommant sur k on obtiens $6n$.

4.4

$$\frac{1}{k} \sum_{v \in Bleus} degre(v) \leq \frac{1}{k} \sum_{v \in Rouges \cup Bleus} degre(v) \leq \frac{6.2.n}{k}$$

4.5

Pour les rouges c'est $6n$ comme ci dessus, pour les bleus

$$\sum_{k=1}^{n} degre(k - eme) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{12n}{k} \leq 12n \log n$$

On prend $2n$ points sur la demi-parabole $y = x^2; x > 0$ et on colorie en rouge ceux de droite et en bleus ceux de gauche.