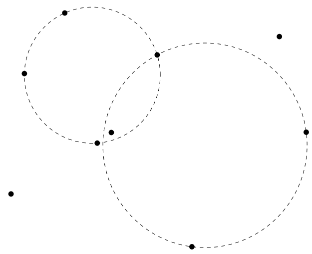
Géométrie algorithmique, examen M2, 3 février 2015, énoncé

Remarque : **Il faut faire des dessins (à chaque question ou presque).**



1 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de 9 points ci dessous (sur la feuille jointe).

2 Graphe des plus proches voisins

Étant donné un ensemble de points S, le graphe des plus proches voisins $NNG(S)$ a comme sommets les points de S et comme arêtes une arête entre chaque point $p \in S$ son plus proche voisin dans $S \setminus \{p\}$.

On supposera que les points sont en position générale c'est à dire que quatre points ne sont jamais cocirculaires, que trois points ne sont jamais alignés et que la distance entre deux paires de points est la même seulement si les deux points sont les mêmes. Le plus proche voisin est donc toujours défini de manière unique.

2.1 Trois points

Dessiner deux points p et q, On va supposer que q est le plus proche voisin de p. Dessiner la partie des points du plan où peut se trouver un point r tel que le plus proche voisin de r soit q.

En déduire une borne inférieure et une borne supérieure sur le degré de p dans $NNG(S)$. Dessiner un exemple où ces bornes sont réalisées avec $|S| \geq 8$.

2.2 NNG est une forêt

Montrer qu'il est impossible d'avoir un cycle dans $NNG(S)$.

C'est à dire qu'il n'existe pas d'ensemble de points distincts $p_0, p_1, \ldots, p_k$ avec $k \geq 2$ tel que p_i soit le plus proche voisin de p_{i-1} ou vice versa (et p_0 le plus proche voisin de p_k ou vice versa).

Rq : L'hypothèse de position générale garanti que les arêtes du cycle éventuel doivent avoir des longueurs différentes.

2.3 NNG est un sous graphe de Delaunay

Justifier que NNG est un sous graphe de Delaunay.

2.4 Un exemple

Dessiner NNG sur la feuille jointe (la triangulation de Delaunay est déjà dessinée).

2.5 Algorithme

Écrire le pseudo-code d'un algorithme calculant le plus proche voisin de chaque point de S. On supposera que un point p dispose d'un champ `p.nn` pour stocker ce voisin. Donner la complexité de cet algorithme.

Le pseudo code devra être dans ce style.

```
Pour chaque point p de S
        p.nn = un voisin de p dans Delaunay
        ...
Fin pour.
...
```

Étudier la complexité de cet algorithme.

2.6 Des disques

Dans cette question, S n'est plus un ensemble de points mais un ensemble de disques disjoints. La distance entre deux disques est la plus courte distance entre ces deux disques (la distance entre les centres moins les rayons).

Donner un exemple montrant que le degré de $NNG(S)$ n'est pas borné.

3 Graphe des deuxièmes plus proches voisins

Étant donné un ensemble de points S, le graphe des deuxièmes plus proches voisins $NNG_2(S)$ a comme sommets les points de S et comme arêtes une arête entre chaque point $p \in S$ et son deuxième plus proche voisin dans $S \setminus \{p\}$.

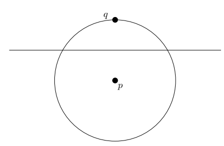
On supposera que les points sont en position générale comme à la partie précédente.

3.1 Lien avec Delaunay

Montrer que si p et q sont voisins dans $NNG_2(S)$ alors p et q sont voisins d'un même point r dans $Del(S)$ la triangulation de Delaunay de S.

3.2 Degré

Trouver un encadrement des bornes inférieure et supérieure sur le degré d'un point dans NNG_2.



Indication. Si q est le second voisin de p, décrire combien on peut avoir de point r ayant aussi q comme second voisin dans différentes zones du plan.

Trouver une mauvaise borne sup est assez facile, faites le. Cherchez en une meilleure à la fin de l'exam si il vous reste du temps.

3.3 Un exemple

Dessiner NNG_2 sur la feuille jointe (la triangulation de Delaunay est déjà dessinée).

3.4 Algorithme

Écrire le pseudo-code d'un algorithme calculant le second plus proche voisin de chaque point de S. On supposera que un point p dispose d'un champ p.snn pour stocker ce voisin.

Le pseudo code devra être dans le même style que ci dessus.

Donner la complexité de cet algorithme.

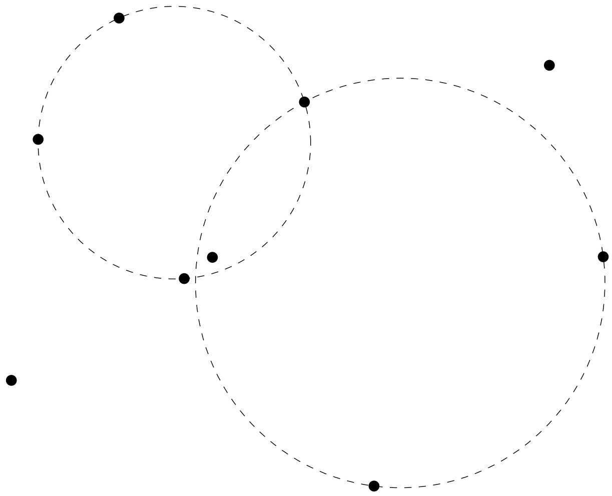
3.5 Cycle ?

Dessiner un exemple où NNG_2 a un cycle ou argumenter pour prouver qu'il n'y a jamais de cycle dans NNG_2.

La correction sera rapidement disponible sur ma page web.

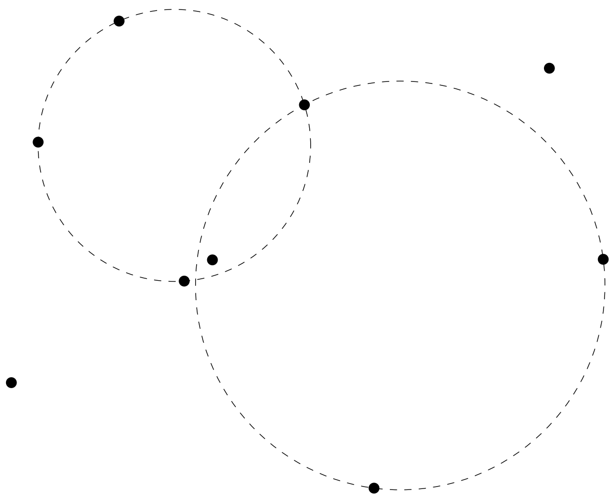
Nom :

1 Triangulation de Delaunay

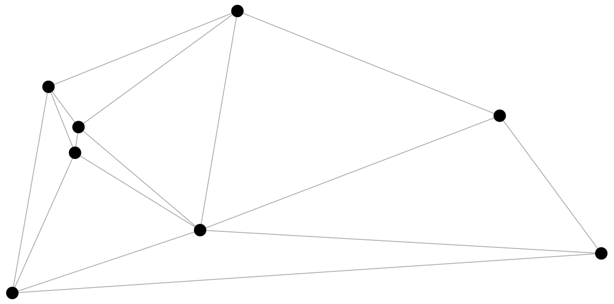


Dessiner la triangulation de Delaunay

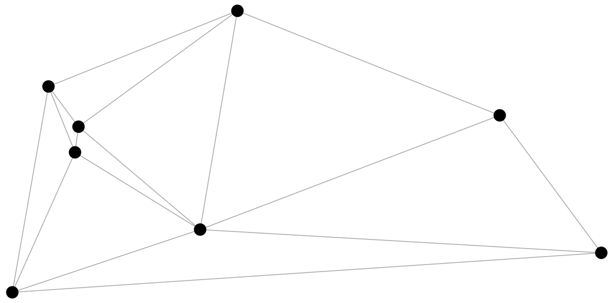
2ème essai en cas de rature !



2 Plus proche voisins



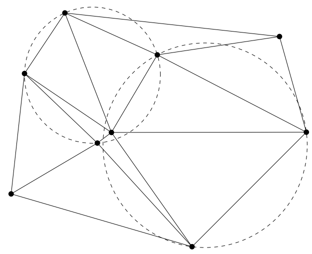
Dessiner NNG



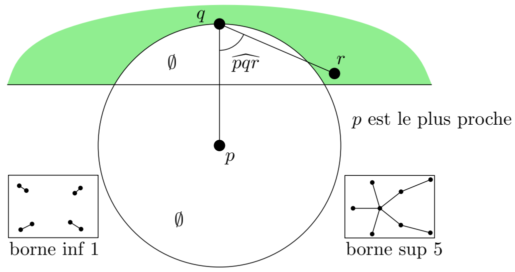
Dessiner NNG_2
(On peut mettre les deux graphes sur le même dessin, mais avec deux couleurs différentes).

Géométrie algorithmique, examen M2, 3 février 2015, correction

1 Triangulation de Delaunay



2 Graphe des plus proches voisins



2.1 Trois points

r peut se trouver dans la zone verte.
Donc dans l'angle $\widehat{pqr}$ est d'au moins $\frac{2\pi}{6}$. Il y a au plus 5 points ayant q comme plus proche voisin.

Par ailleurs le plus proche voisin de q est soit p soit dans la zone verte. Là aussi on a un angle $\widehat{pqr}$ d'au moins $\frac{2\pi}{6}$.

Le degré d'un sommet de $NNG(S)$ est au plus 5.

Par ailleurs chaque point a trivialement au moins un voisin dans $NNG(S)$.

Le degré d'un sommet de $NNG(S)$ est au moins 1.

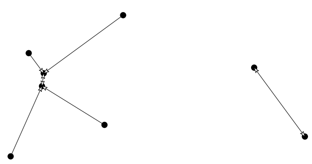
2.2 NNG est une forêt

Supposons que l'on ai un cycle $p_0, p_1, \ldots, p_k$ avec $k \geq 2$ dans $NNG(S)$, l'hypothèse de position générale nous garanti qu'il y a une arête la plus longue dans ce cycle $p_i p_{i+1}$. Supposons que p_i est le plus proche voisin de p_{i+1} (sinon on échange les roles de p_i et p_{i+1}) on obtiens une contradiction avec le fait que l'arête $p_i p_{i+1}$ est plus longue que $p_{i+1} p_{i+2}$.

2.3 NNG est un sous graphe de Delaunay

Si p est le plus proche voisin de q alors le disque de centre p passant par q ne contient pas d'autre point de S que p, le disque de diamètre pq, qui est inclus dans le précédent, est vide. pq vérifie la propriété du cercle vide et est donc de Delaunay.

2.4 Un exemple

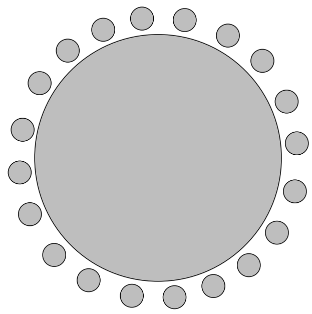


2.5 Algorithme

```
Pour chaque point p de S
        d=∞
        Pour chaque voisin v de p dans Del(S)
                Si |pv| < d alors
                        d = |pv|
                        p.nn = v
                Fin si.
        Fin pour.
Fin pour.
```

La complexité est $\sum_{p \in S} d^{\circ}_{Del}(p) = 6n$ comme fait plusieurs fois en cours.

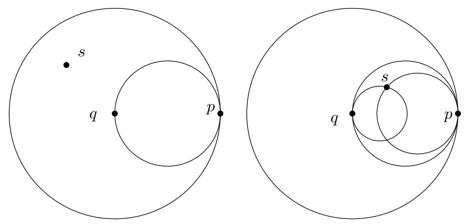
2.6 Des disques



3 Graphe des deuxièmes plus proches voisins

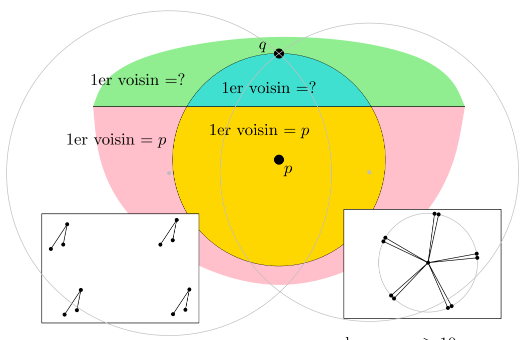
3.1 Lien avec Delaunay

Si p est le deuxième voisin de q alors le disque de centre q passant par p contient deux points : q et s, le premier voisin de q.
Si le disque de diamètre pq est vide alors pq est une arête de Delaunay, on prends pour r le sommet d'un des deux triangles ayant cette arête.
Si le disque de diamètre pq contient r alors le disque passant par p (resp. q) et r tangent au disque de diamètre pq en p (resp. q) est vide et rp (resp. rq) est une arête de Delaunay.



3.2 Degré

Cas 1 : Un point r dans la zone bleu peut avoir comme premier voisin un point dans la zone verte et q comme deuxième voisin, mais alors r est le premier voisin de p et donc voisin de p dans $NNG(S)$.
Cas 2 : Un point r dans la zone orange ou rose peut avoir comme premier voisin p et q comme deuxième voisin, mais alors r est un voisin de p dans $NNG(S)$. Comme le degré de p dans $NNG(S)$ est au plus 5 on a au plus 5 points dans les cas 1 et 2.
Cas 3 : Un point r dans la zone verte peut avoir q comme deuxième voisin, mais alors l'angle $\widehat{pqr}$ est d'au moins $\frac{2\pi}{6}$.



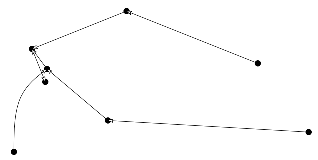
borne inf 2 borne sup ≥ 10

On a donc facilement une borne de 6(5+1)=36.

Le tracé en gris montre que l'on peut avoir simultanément 2 points dans le cas 2 et un point dans le cas 1, et 2 est probablement un maximum ce qui nous fait passer à (6(2+1)=15

L'exemple ci contre montre qu'un degré 10 peut être atteint. Et je conjecture que l'on ne peut pas faire mieux.

3.3 Un exemple



3.4 Algorithme

On suppose que le plus proche voisin est déjà calculé.

```
Pour chaque point p de S
        d1=|p p.nn|
        d2=∞
        Pour chaque voisin v de p dans Del(S)
                Si v≠p.nn et |pv| < d2 alors
                        d2 = |pv|
                        p.snn = v
                Fin si.
        Fin pour.
        Pour chaque voisin v de p.nn dans Del(S)
                Si v≠p et |pv| < d2 alors
                        d2 = |pv|
                        p.snn = v
                Fin si.
        Fin pour.
Fin pour.
```

La complexité est

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in S}(d^\circ_{Del}(p)+d^\circ_{Del}(p.nn)) &= \sum_{p\in S} d^\circ_{Del}(p)+\sum_{p\in S} d^\circ_{Del}(p.nn)\\
&\leq 6n+\sum_{p\in S}\sum_{q=p.nn} d^\circ_{Del}(q)\\
&= 6n+\sum_{q\in S}\sum_{p;q=p.nn} d^\circ_{Del}(q)\\
&\leq 6n+\sum_{q\in S} d^\circ_{NNG}(q)d^\circ_{Del}(q)\\
&\leq 6n+5\sum_{q\in S} d^\circ_{Del}(q)\\
&\leq 6n+5\cdot 6n=36n
\end{aligned}$$

3.5 Cycle ?