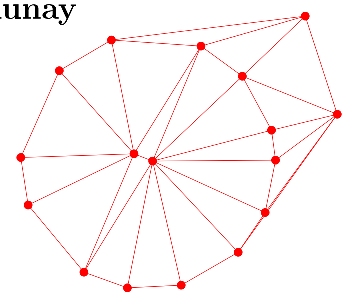
1 Mini-exam 9 janvier 2018

1.1 Dessiner la triangulation de Delaunay

de l'ensemble de points sur la feuille jointe.

1.1 Correction:



1.2 Gabriel, Delaunay et le graphe des demi-lunes

Étant donné un ensemble S de n points du plan, on dit que deux points a et b de S définissent une arête du graphe de Gabriel si le disque $D(a,b)$ de diamètre ab ne contient pas de points de S dans son intérieur. On notera G_S le graphe de Gabriel de S formé par toutes les arêtes de Gabriel. Une arête ab sera dans le graphe des demi-lunes L_S si au moins un des deux demi-disques formés en découpant $D(a,b)$ en deux par le segment ab est vide. On note D_S la triangulation de Delaunay de S. On note E_S l'enveloppe convexe de S.

1.2.1

Donner et démontrer des relations d'inclusion entre ces quatre graphes.

1.2.2

Dessiner un exemple avec quelques points (au moins 6) dans lequel $L_S = D_S = G_S$.

1.2.3

Dessiner un exemple avec quelques points (au moins 6) dans lequel ces trois graphes sont tous différents.

1.2.4

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille (le nombre d'arêtes) de D_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

1.2.5

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille de G_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

1.2.6

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille de L_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

1.2 Correction:

1.2.1

$E_S, G_S \subset D_S \subset L_S$

Une arête de D_S a un cercle vide, au moins un des demi-cercle de diamètre l'arête est inclus dedans et donc l'arête est aussi dans L_S. Une arête de Gabriel a un cercle vide (le cercle diamétral par définition de Gabriel) elle est donc de Delaunay. Une arête de l'enveloppe convexe est de Delaunay (elle a un cercle vide de très grand rayon). Une arête de Gabriel n'est pas forcément sur l'enveloppe convexe (dessiner juste un triangle obtus) ni le contraire (une arête de Gabriel intérieure à l'enveloppe convexe est facile à dessiner).

1.2.2

Par exemple un pentagone régulier et un point au centre.

1.2.3

Par exemple 6 points sur une demi-parabole

1.2.4

Delaunay a toujours $3n-3-k$ arêtes où k est la taille de l'enveloppe convexe, c'est donc toujours du $\Theta(n)$.

Si on veut quelque chose de plus précis on a comme borne supérieure $3n-6$ (mettre $n-3$ points comme on veut dans un triangle). Comme borne inférieure $2n-3$ avec n points comme on veut sur le bord d'un convexe.

1.2.5

Pour qu'une arête de Delaunay ne soit pas de Gabriel, il faut qu'un des triangles incident ait un angle obtus. Un triangle a au plus un angle obtus. Donc il y a au moins $(3n-3-k)-(2n-3-k)-n-1$ arêtes de Gabriel, un exemple est donné avec n points sur une demi-parabole. Il y a au plus $3n-6$ arêtes de Gabriel comme pour Delaunay, mais on est incapable d'atteindre cette borne car il est impossible d'éviter complètement les angles obtus si l'enveloppe convexe est un triangle. Un maillage hexagonal va fournir une taille $3n-\Theta(\sqrt{n})$.

1.2.6

La borne inférieure est donnée par celle de Delaunay. Un maillage hexagonal va fournir une taille $3n-\Theta(\sqrt{n})$. La borne supérieure est quadratique, avec des points sur la demi-parabole, toute arête est dans L_S.

1.3 Quadrangulation

Une quadrangulation est un découpage de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points dans le plan dans lequel toutes les faces sont des quadrilatères. Dans une quadrangulation de n points dont l'enveloppe convexe est un carré, quel est le degré moyen d'un sommet ?

1.3 Correction:

Si f, e, n sont les nombres de faces, aretes et sommets.

Euler: $f-e+n=2$.

Toutes les faces sont des quads (même la face infinie): $4f=2e$

Ce qui nous donne $f=n-2$ et $e=2n-4$.

Le degré moyen est $\frac{1}{n}\sum_v \sharp$aretes incidentes à $v = \frac{1}{n}\sum_a \sharp$sommets incidents à $a = \frac{1}{n}2e = 4-\frac{8}{n}$

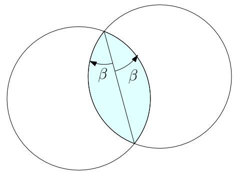
2 Mini-exam 23 janvier 2018

2.1 β squelette

Étant donné deux points a et b on appelle β-croissant de ab la zone comprise entre les deux arcs de cercles passant par a et b faisant un angle β avec a et b.

Étant donné un ensemble de points X, pas tous alignés, on appelle β-squelette de X l'ensemble de ssegments formés par deux points de X tels que le β croissant associé ne contiennent pas de points de X dans son intérieur.

2.1.1 Faisons varier β



Si $\beta = 0$ quel est le β squelette ?
Si $\beta = \pi$ quel est le β-squelette ?
Pour deux valeurs $\beta_1 < \beta_2$ entre 0 et π quelle est la relation entre le β_1-squelette et le β_2-squelette ?

2.1.2 β-squelette $\subset$ Delaunay

Existe t'il des valeurs de β pour lesquelles le β-squelette est un sous-ensemble de la triangulation de Delaunay ?

Si oui, pour quelles valeurs ? Dessiner un exemple montrant que pour ces valeurs de β l'inclusion dans l'autre sens est fausse.

Si non, dessiner un exemple avec des arêtes du β squelette qui ne sont pas de Delaunay et des arêtes de Delaunay qui ne sont pas dans le β squelette.

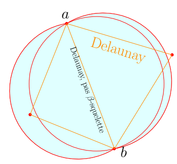
2.1.3 Delaunay $\subset$ β-squelette

Existe t'il des valeurs de β pour lesquelles la triangulation de Delaunay est un sous-ensemble du β-squelette ?

Si oui, pour quelles valeurs ? Dessiner un exemple montrant que pour ces valeurs de β l'inclusion dans l'autre sens est fausse.

Si non, dessiner un exemple avec des arêtes du β squelette qui ne sont pas de Delaunay et des arêtes de Delaunay qui ne sont pas dans le β squelette.

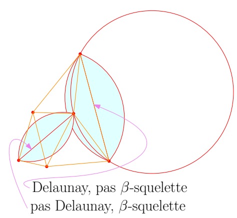
2.1 Correction:



2.1.1 Faisons varier β

Si $\beta = 0$ le β-squelette est le graphe complet.
Si $\beta = \pi$ quel le β-squelette est vide.
Le β_1-squelette est inclus dans le β_2-squelette.

2.1.2 β-squelette $\subset$ Delaunay



Si $\beta \geq \frac{\pi}{2}$ le β-croissant contient le disque de diamètre ab, on a donc un disque vide passant par ab et une arête du β-squelette est de Delaunay.
La réciproque est fausse (cf dessin).

2.1.3 Delaunay $\subset$ β-squelette

Si $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ le β-croissant peut être vide avec deux points dans le complémentaire du croissant dans le disque diametral, un de chaque coté, alors l'arête ne sera pas de Delaunay. Comme pour toute valeur de β il est facile d'avoir une arête de Delaunay qui n'est pas dans le β squelette, par exemple une arête de l'enveloppe convexe avec un point presque aligné un peu à l'intérieur.

2.2 Distance au plus proche voisin

On considère un processus de Poisson X d'intensité n dans le plan. Calculer l 'espérance de la distance entre l'origine et son plus proche voisin dans X. L'intégrale $\int_0^\infty e^{-Ax^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4A\sqrt{A}}$ pour une constante A positive pourra être utile.

2.2 Correction:

Pour chaque point de X on va compter sa distance à l'origin si il est le plus proche voisin:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{q\in X} \mathbb{1}_{[NN_X(O)=q]} \|q\|\right]$$

On utilise la formule de Slivnyak-Mecke pour passer à une intégrale:

$$= n\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\left[NN_X(O)=q\right] \|q\| dq = n\int_{\mathbb{R}^2} e^{-n\pi\|q\|^2} \|q\| dq$$

On passe en coordonnées polaires:

$$= n\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-n\pi r^2} r \cdot r dr d\theta = n\cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4n\pi\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2.3 Arithmétique de la machine

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si il est vrai ou faux. Si il est faux donner un contre exemple avec l'arithmétique jouet du cours (décimale à deux chiffres).

$$\begin{aligned}
a < b \quad &\Leftrightarrow \quad a - b < 0 && (1)\\
(a*b)*c \quad &= \quad a*(b*c) && (2)\\
a+b \quad &= \quad b+a && (3)\\
a*(b+c) \quad &= \quad a*b+a*c && (4)\\
x > y \quad &\Rightarrow \quad sqrt(x) > sqrt(y) && (5)\\
(\text{for } x,y\geq 0)\;\; x*x \geq y*y \quad &\Rightarrow \quad x \geq y && (6)\\
a,b,c \text{ entiers } \in [-2^{20}, 2^{20}] \quad &\Rightarrow \quad (a-b)*(a-c) = a*a - a*b - a*c + b*c && (7)
\end{aligned}$$

2.3 Correction:

(1) vrai. Grace aux nombres dénormalisés.
(2) faux. $(26*26)*12 = 676*12 \simeq 680*12 = 8160 \simeq 8200 \neq 26*(26*12) = 26*312 \simeq 26*310 = 8060 \simeq 8100$.
(3) vrai. La valeur exacte est la même, l'arrondi est le même.
(4) faux. $2*(52+54) = 2*106 \simeq 2*110 = 220 \neq 2*52+2*54 = 104+108 \simeq 100+110 = 220$.
(5) faux. $\sqrt{121} = 11 \simeq \sqrt{122} = 11.045361$.
(6) vrai.
(7) vrai. Tous les nombres calculés sont des entiers $< 2^{54}$ ils sont donc représentés exactement.