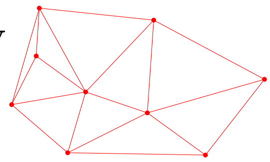
Exam AVR MEPT (geo algo) 20-12-2018

(utilisez une copie différente de la partie robotique)

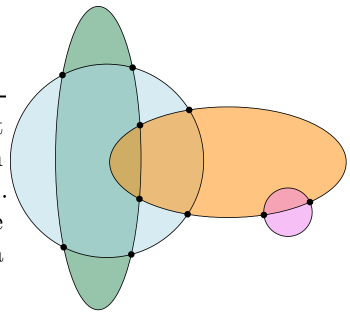
1 Dessiner la triangulation de Delaunay



de l'ensemble de points sur la feuille jointe.

1.0 Correction:

2 Arrangement d'ellipses



On considère un arrangement de n ellipses. L'arrangement est connexe (un ellipse intersecte au moins une autre ellipse et on ne peut pas séparer l'ensemble des ellipses). L'arrangement est en position générale (deux ellipses sont soit sécantes soit disjointes, pas tangentes). On appelle s le nombre de sommets de l'arrangement, a le nombre d'arêtes et f le nombre de face finies. Sur le dessin ci contre, on a $n = 4$, $s = 10$, $a = 20$ et $f = 11$.

2.1 Nombre de faces

Ecrire deux relations sur les variables s, a et f. En déduire f et a en fonction de s.

2.1 Correction:

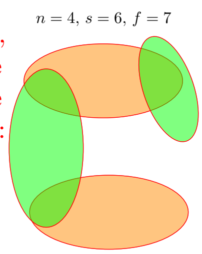
Euler: $s - a + (f + 1) = 2$ (ne pas oublier la face infinie). On vérifie que sur le dessin la relation d'Euler est vérifiée: $10 - 20 + (11 + 1) = 2$.
Incidences sommets-aretes: $4s = 2a$. On vérifie que sur le dessin: $4 \times 10 = 2 \times 20$.
d'où : $a = 2s$ et $f = 1 + a - s = 1 + 2s - s = s + 1$

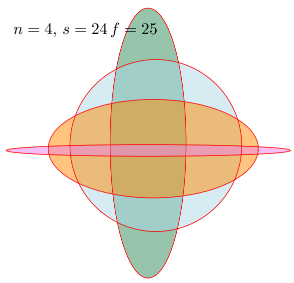
2.2 Nombre de sommets

Donner une borne inférieure et une borne supérieure sur s en fonction de n. En déduire des bornes sur f. Dessiner des exemples atteignant ces bornes pour $n = 4$.

2.2 Correction:

Une ellipse coupe au moins une autre ellipse, chaque nouvelle ellipse après la première ajoute au moins deux sommets : $s \geq 2n - 2$. Chaque paire d'ellipses défini au plus quatre sommets : $s \leq 4\frac{n(n-1)}{2} = 2n^2 - 2n$.
D'où : $2n - 1 \leq f \leq 2n^2 - 2n + 1$. Pour $n = 4$:
$2 \times 4 - 1 = 7 \leq f \leq 2 \times 4^2 - 2 \times 4 + 1 = 25$.





3 Nombres flottants

Si les calculs sont effectués avec des `double` en respectant la norme IEEE754, que va afficher la fonction suivante ? (justifier).

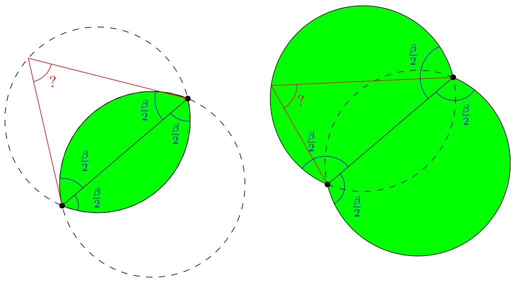
```
double x=0,j=1;
while (x≠x+1) x=x+1;
while (x=x+j) j=j+1;
print(x,j);
```

3.0 Correction:

Ça va afficher $2^{53} = 9007199254740992$ et 2 car $2^{53} + 1$ est le plus petit entier qui n'est pas représentable dans un double, par contre $2^{53} + 2$ est représentable et donc la seconde boucle ne sera exécutée qu'une seule fois. Par contre la première risque de prendre un peu trop de temps.

4 Beta squelette

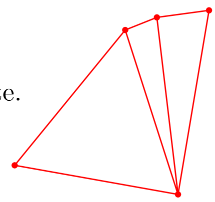
Étant donné un ensemble de n points du plan, on relie deux points par une arête du β-squelette, si la forme délimitée par les deux arcs de cercles passant par les deux points et faisant un angle de $\frac{\beta}{2}$ avec le segment est vide.
On peut utiliser le calcul de la triangulation de Delaunay comme opération de base sans détailler l'algorithme. On peut accéder à l'ensemble des sommets et aux arêtes incidentes à un sommet de la triangulation et aux deux triangles incidents à une arête.



4.1 Dessin

Dessiner le $\frac{\pi}{2}$-squelette sur l'ensemble de points de la feuille jointe.

4.1 Correction:



4.2 Delaunay

Pour quelle valeur de β le β-squelette est-il inclus dans la triangulation de Delaunay ? Pour quelle valeur de β la triangulation de Delaunay est-elle incluse dans le β-squelette ? Dessiner des exemples pour différentes valeurs de β en mettant en évidence les inclusions (ou non inclusions).

4.2 Correction:

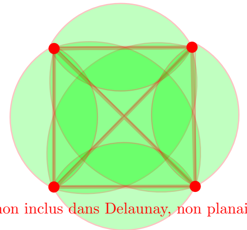
A noter que l'angle en rouge sur la figure est $\frac{\beta}{2}$ à gauche et $\pi - \frac{\beta}{2}$ à droite. Pour $\beta \geq \pi$ la forme contient le disque de diamètre les deux points. Si l'arête est dans le β-squelette, la forme est vide, donc le disque est vide et l'arête est de Delaunay. Pour $\beta < \pi$ le β-squelette n'est pas forcément inclus dans Delaunay (Cf dessin question suivante). Un triangle de Delaunay peut avoir un de ces angles aussi proche de π que l'on veut, on ne peut donc pas choisir β pour forcer l'appartenance au β-squelette: la triangulation de Delaunay n'est pas nécessairement incluse dans le β-squeltte quelquesoit β (Cf dessin question suivante).

4.3 Planarité

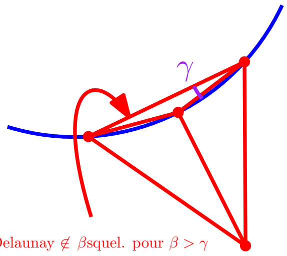
Pour quelle valeur de β le β-squelette est-il sans intersection entre ses arêtes (hors leurs extrémités) ? Dessiner des contre-examples pour les valeurs où il y a des intersections

4.3 Correction:

Pour $\beta \geq \pi$, le β-squelette est inclus dans Delaunay qui est sans intersection, donc il est sans intersection. Pour $\beta < \pi$, le β-squelette des quatre sommets d'un carré contient les deux diagonales (qui se croisent).



β-squelette non inclus dans Delaunay, non planaire



arête de Delaunay $\notin$ βsquel. pour $\beta > \gamma$

4.4 Algorithme

Proposer un algorithme pour calculer le $\frac{3\pi}{2}$-squelette. Analyser sa complexíté.

4.4 Correction:

On calcule la triangulation de Delaunay.
Pour chaque sommet v de la triangulation
    Pour chaque arête vw incidente à v
        Si on n'a pas encore vu w
            Soit vwt et wvu les deux triangles incidents à vw
            Si les cercles des deux triangles font un angle supérieur à $\frac{3\pi}{4}$ avec le segment vw
                afficher vw.

On a deux boucles imbriqués, la boucle extérieure itère sur les sommets et la boucle intérieure sur les arêtes incidentes, cette boucle intérieure a une complexité $d^\circ(v)$ et donc la boucle extérieure une complexité $\sum_v d^\circ(v) < 6n$. La complexité de l'algorithme est dominée par le calcul de la triangulation de Delaunay en $O(n \log n)$.

4.5 Borne inférieure

Donner et démontrer une borne inférieure pou le calcul du $\frac{\pi}{2}$-squelette.

On suppose que "calculer le β-squelette" signifie obtenir une structure de donnée dans laquelle on peut itérer sur les sommets, on peut accéder aux arêtes incidentes à un sommet et aux deux sommets incidents à une arête.

4.5 Correction:

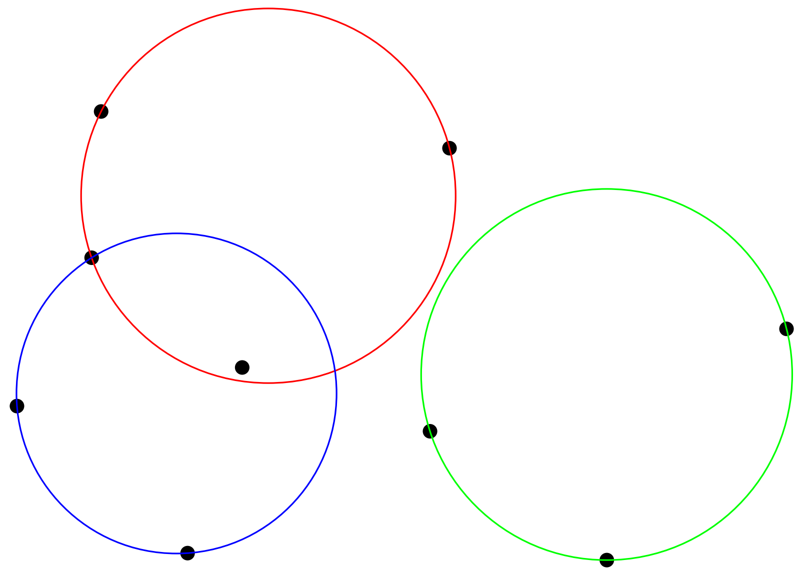
Soit un ensemble de nombres à trier x_i, $1 \leq i \leq n$

L'algorithme suivant:

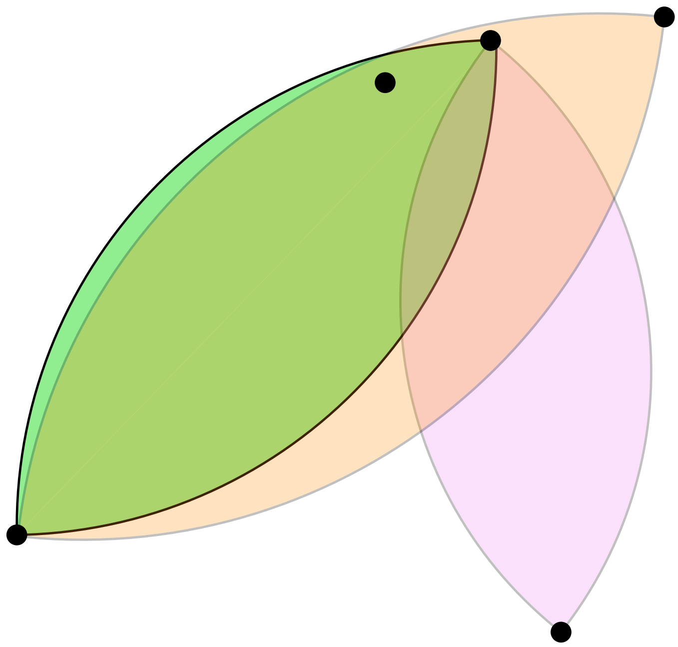
    Calculer le $\frac{\pi}{2}$-squelette des points $(x_i, 1)$
    Chercher le point u à x minimum
    Tant que on a pas vu tous les points
        afficher x_u
        parmi les deux voisins de u soit v celui qui est à droite
        $u = v$

va afficher les nombres dans l'ordre croissant et donc trier. On ne peut pas trier plus vite que $\Omega(n \log n)$, l'étape limitante de cet algorithme est donc le calcul du $\frac{\pi}{2}$-squelette qui doit prendre au moins $\Omega(n \log n)$.

Dessiner la triangulation de Delaunay



Dessiner le $\frac{\pi}{2}$-squelette

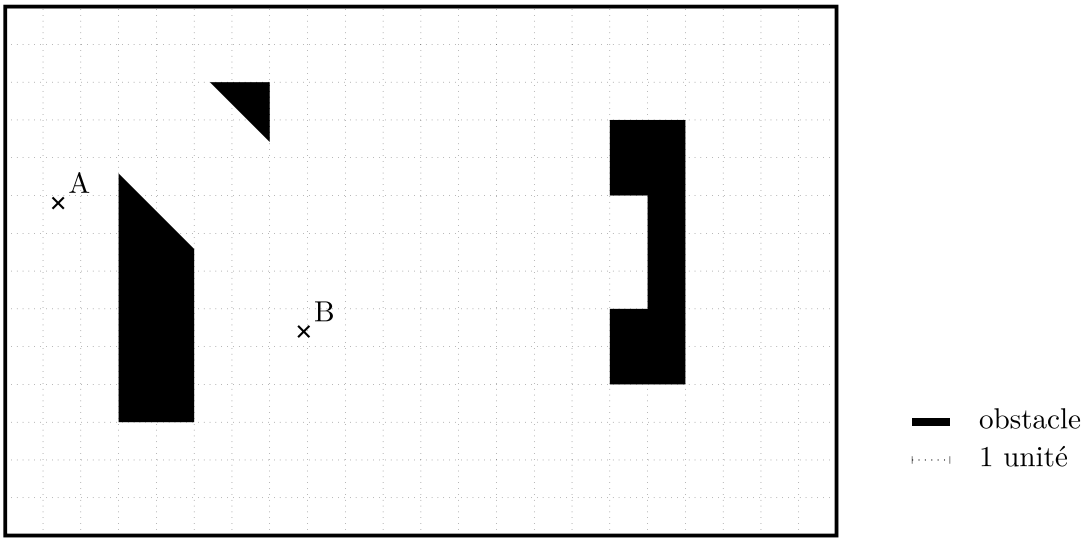


2018-12-20

Modèles d'environnements, planification de trajectoires
Énoncé de la partie planification de trajectoires

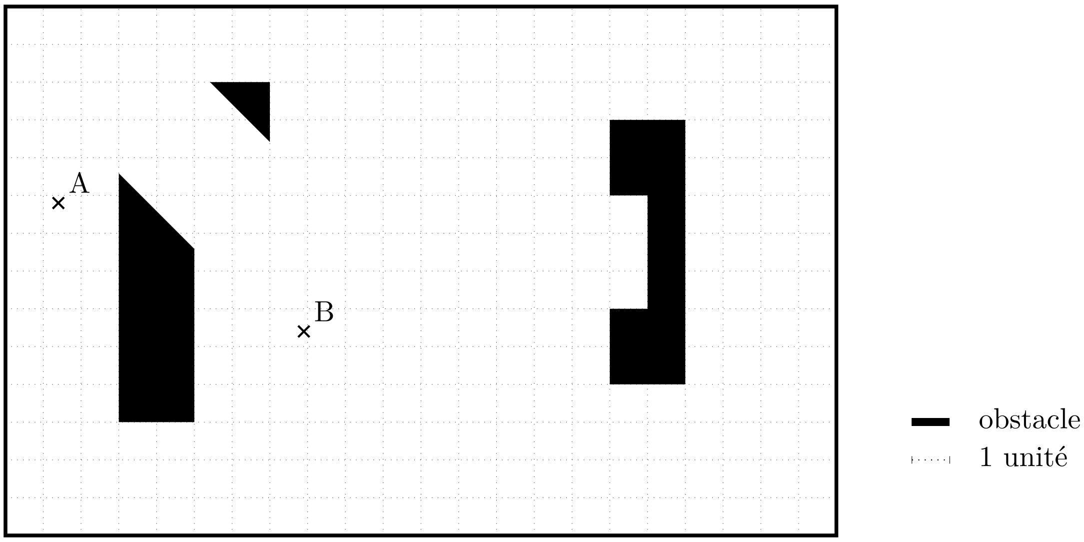
1 Planification de trajectoire

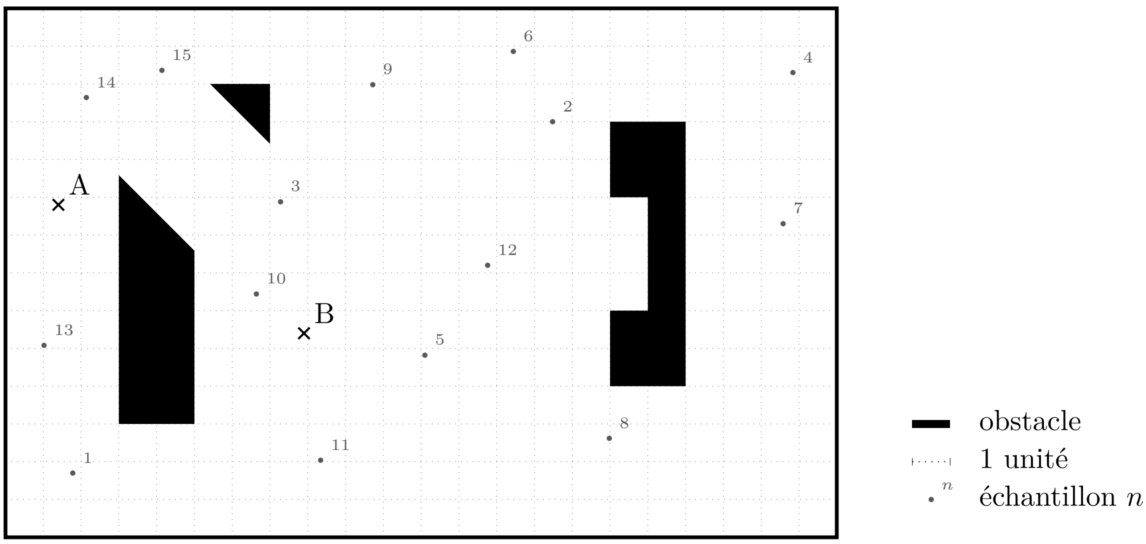
Soit un robot circulaire et holonome de rayon 1 unité placé dans un environnement fermé (par des murs solides) et comprenant trois obstacles. La figure ci-dessous en donne une illustration.

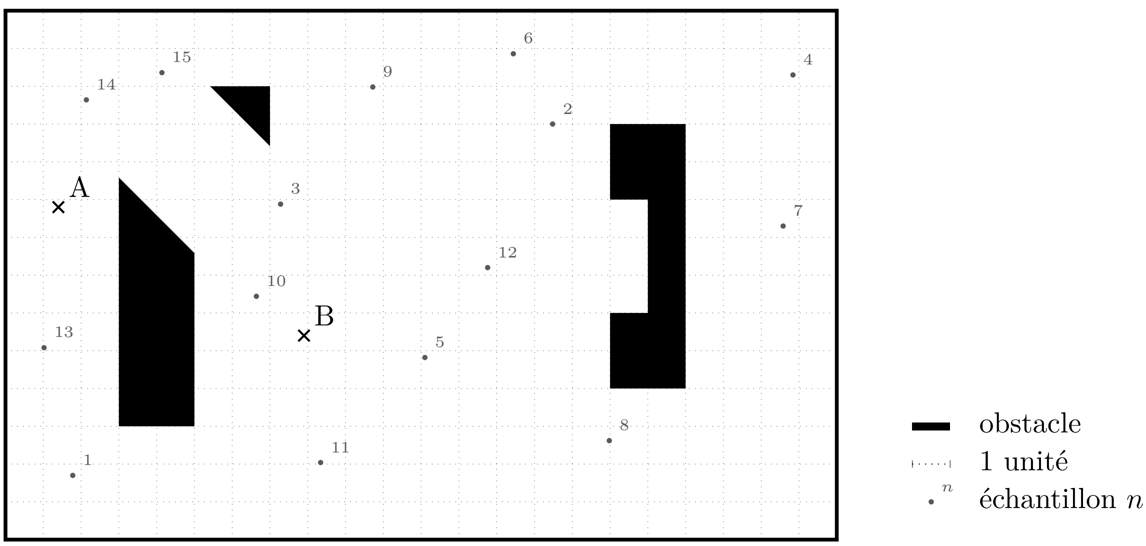


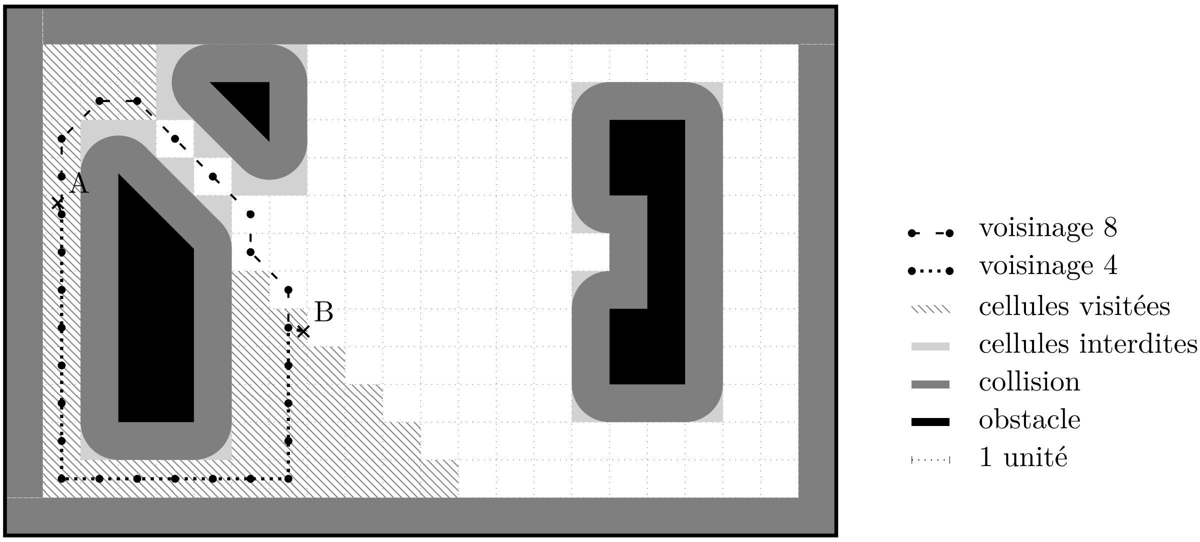
Le robot se situe initialement au point A et le but de l'exercice est de planifier une trajectoire jusqu'au point B. Vous utiliserez les canevas joints pour répondre aux questions de dessin, sans oublier de compléter la légende le cas échéant. Vous disposez de plus de canevas que nécessaire, vous indiquerez clairement quel canevas correspond à quelle(s) question(s) et barrerez visiblement les canevas à ne pas prendre en compte pour la correction.

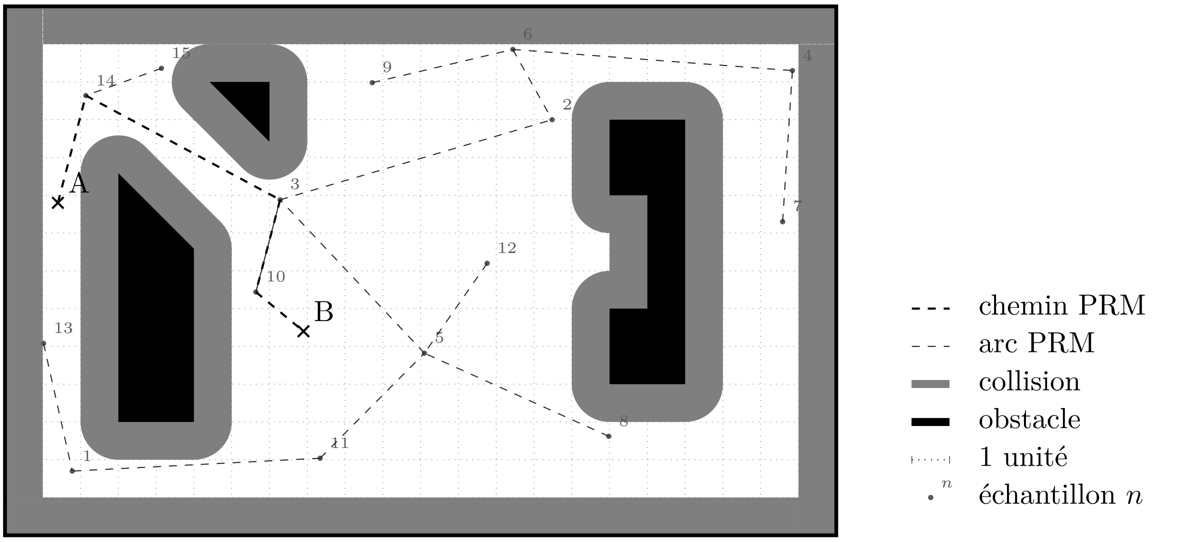
1. Quelles sont les trois grandes familles d'algorithmes de planification de chemin ? Décrivez chacune d'elle en donnant un exemple d'algorithme.
2. Dessinez le chemin le plus court. Vous expliquerez comment vous avez procédé.
3. À l'aide des cellules de la grille organisée en voisinage 4, indiquez les cellules visitées par l'algorithme de Dijkstra et un chemin le plus court.
4. Dans ces conditions, quelle serait la différence si on partait de B pour aller en A, sur le chemin et sur les cellules visitées ?
5. Indiquez un chemin le plus court avec un voisinage de 8.
6. Expliquez l'algorithm PRM pour planifier un chemin. Sur une autre figure, en vous aidant des points échantillonnés (dans l'ordre indiqué), dessinez le graphe généré par PRM avec un rayon de connexion de 8 unités. Indiquez le chemin le plus court trouvé ainsi.
7. Faites de même avec l'algorithme sPRM (explication comprise).

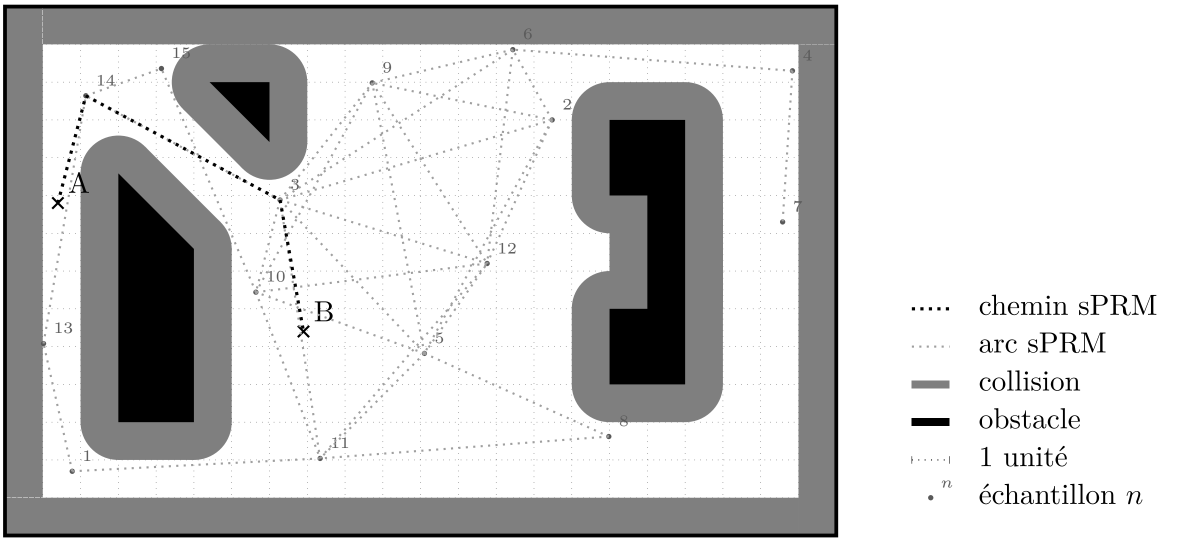

A
B
obstacle
1 unité


A
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
obstacle
1 unité
échantillon n


A
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
obstacle
1 unité
échantillon n


A
B
voisinage 8
voisinage 4
cellules visitées
cellules interdites
collision
obstacle
1 unité


A
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
chemin PRM
arc PRM
collision
obstacle
1 unité
échantillon n


A
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
chemin sPRM
arc sPRM
collision
obstacle
1 unité
échantillon n