2021-03-04

Modèles d'environnements, planification de trajectoires
Énoncé de la partie planification de trajectoires

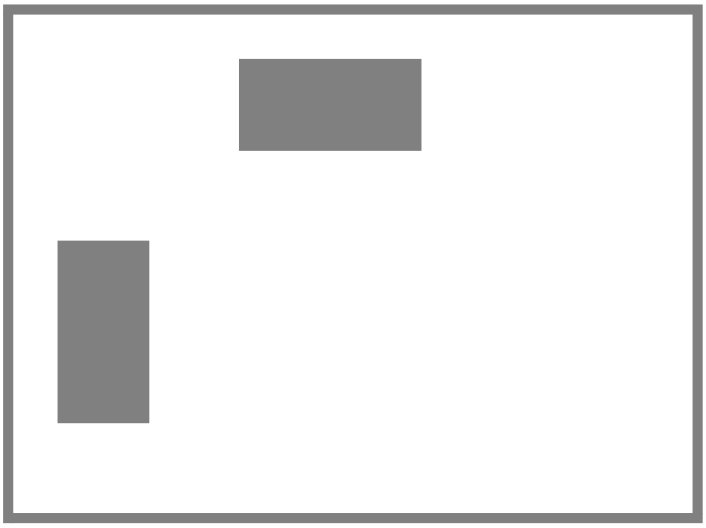


Fig. 1 : Carte de l'environnement.

Version avec corrigé !

Planification de trajectoire

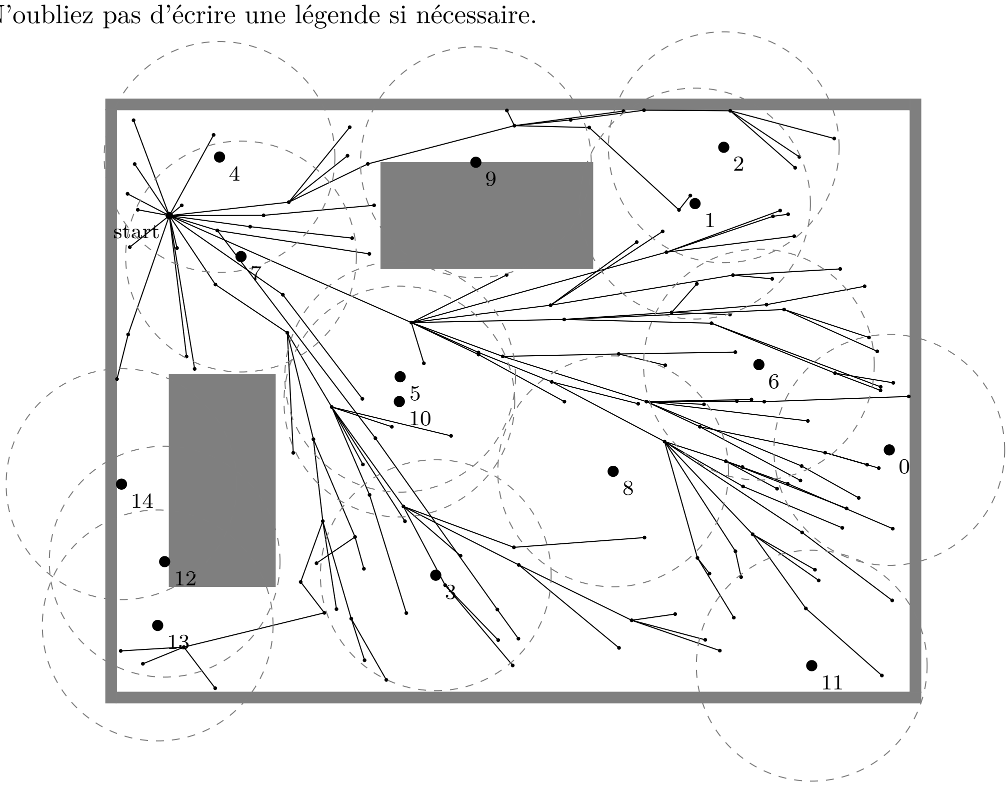
Soit un robot mobile ponctuel holonome se déplaçant dans un espace 2D (voir figure 1). On souhaite planifier sa trajectoire à l'aide de l'algorithme RRT*.

1. Quel type de cartes est représenté par la figure 1 ? Quelles sont les caractéristiques de ce type de cartes ? Citez deux autres types de cartes rencontrés en robotique mobile avec leurs caractéristiques.
2. Qu'est-ce que l'espace de configuration ? À quoi correspond-il en général ? Quelle est sa forme dans ce cas particulier ? À quoi peut-il servir dans le contexte du cours ?
3. Décrivez l'algorithme RRT* : son but, son principe de fonctionnement, ses différentes étapes, les structures de données impliquées, etc...
4. Quelles sont les caractéristiques générales de RRT* ? Quelles sont ses différences avec les algorithmes A*, PRM et RRT ?
5. Complétez un des canevas de la page suivante à l'aide des échantillons fournis comme le ferait l'exécution de RRT*.[1] Voir figure 2.
6. L'arbre indique-t-il le chemin le plus court à chacun des nœuds si l'on se restreint aux nœuds en place (mais avec éventuellement d'autres liens) ? Pourquoi ? Le recâblage s'arrête aux voisins immédiats mais les voisins de ceux-ci (et qui n'en sont pas des enfants) pourraient potentiellement aussi bénéficier du chemin amélioré. Dans RRT*, il faut attendre un nouveau point pour cette mise à jour.

1. Si vous devez retirer des liens de l'arbre, indiquez-le lisiblement, par exemple à l'aide d'une croix sur le lien. Dans tous les cas, complétez la légende.

7. (Bonus) Comment se fait-il qu'il y ait des croisements dans l'arbre, par exemple à gauche de l'échantillon 10 ou au-dessus du 3 ? Dans l'algorithme RRT*, la taille du voisinage considéré diminue avec le nombre de nœuds de l'arbre de manière à limiter la complexité. Un croisement arrive lorsqu'un parent potentiel est trop loin pour le deuxième point et que celui-ci se relie donc à un parent sur le côté qui crée le croisement. Comme au-dessus, l'échantillonnage d'un point résoudra ce problème.

Notes :
- Les petits points sont les nœuds de l'arbre courant et les lignes en sont les arêtes.
- Les points plus gros et numérotés sont les échantillons entourés de leur voisinage.
- Une seule figure sera notée : assurez-vous d'indiquer explicitement laquelle.
- N'oubliez pas d'écrire une légende si nécessaire.



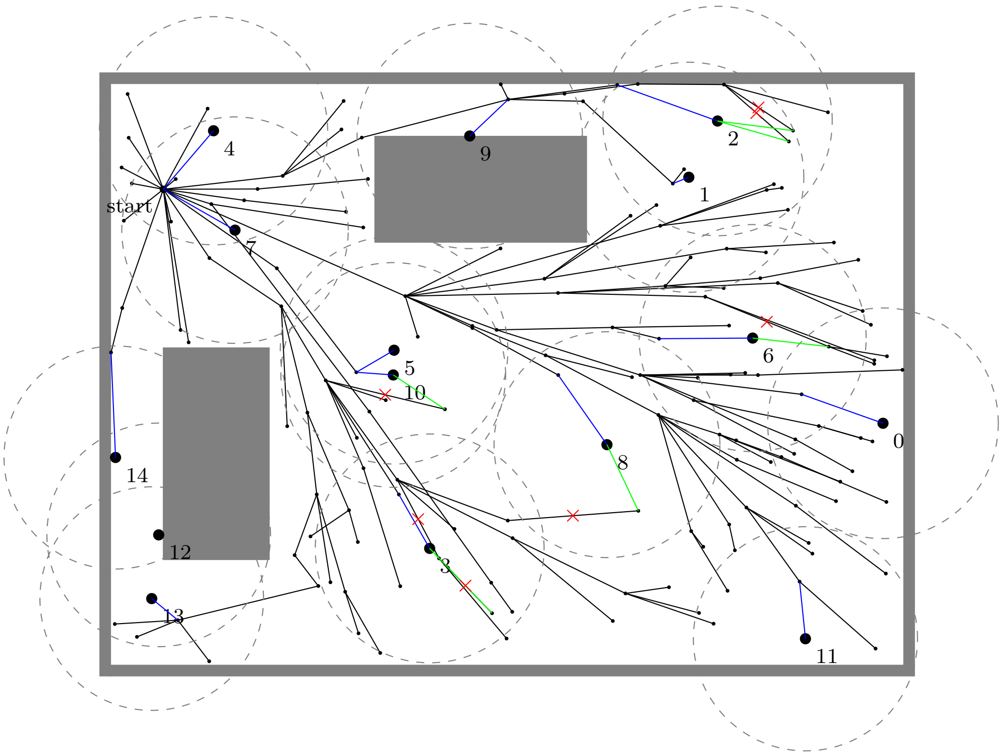
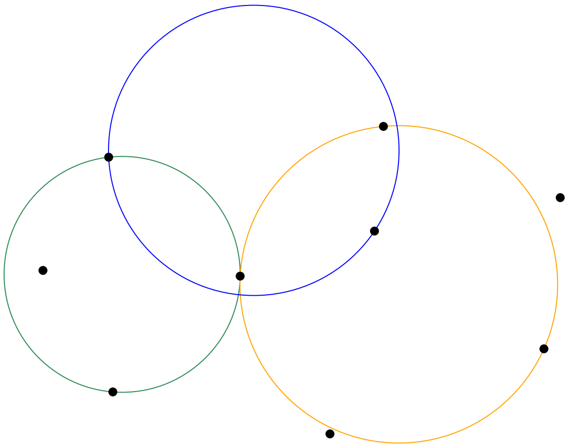


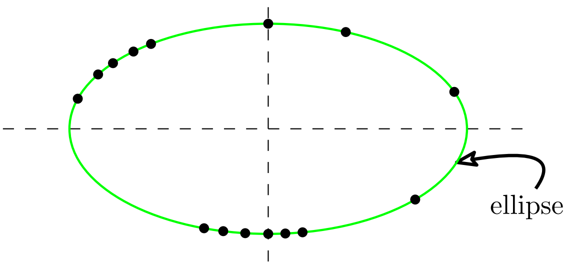
FIG. 2 : Figure complétée : en bleu les connexions aux nouveau points ; en vert les nouveaux liens lors d'un recâblage avec les anciens lien barrés de rouge.

Nom:

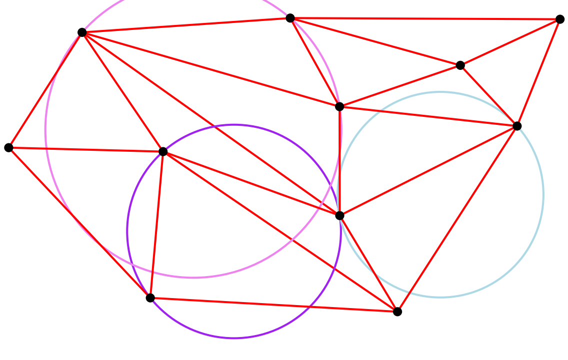
Dessiner la triangulation de Delaunay



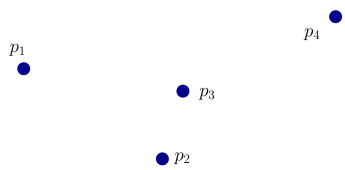
Dessiner la triangulation de Delaunay



Indiquer les arêtes non localement de Delaunay



Graphe des rectangles vides?

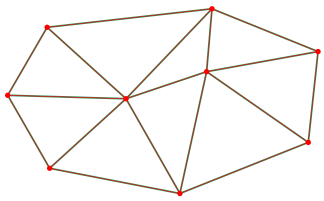


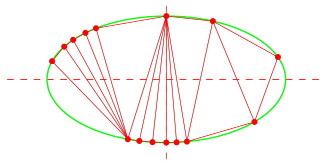
Examen 4 mars 2021

1 Dessiner la triangulation de Delaunay

des deux ensembles de points sur la feuille jointe.

1 Correction:

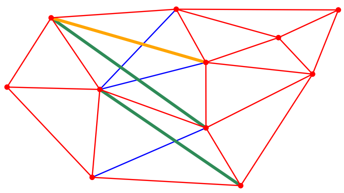




2 Triangulation localement de Delaunay

Mettre en évidence les arêtes **non localement** de Delaunay dans la triangulation sur la feuille jointe.

2 Correction:



En vert: non localement de Delaunay
En orange: non Delaunay
. **mais** localement de Delaunay
En bleu: Delaunay

3 Triangulation bicolore

Soit S un ensemble de $2n$ points en position convexe. On choisit un sous-ensemble R de n points de S : les points rouges. Les points restants $B = S \setminus R$ étant bleus. On supposera les points en position générale (pas 3 points alignés, pas 4 cocycliques). On note $Del(S)$ la triangulation de Delaunay de S. On parlera d'arête rouge, bicolore ou bleue selon la couleur des extrémités.

1. Quel est en le nombre d'arêtes dans la triangulation de Delaunay de S ?
2. Comment colorier les points pour maximiser le nombre d'arêtes rouges dans $Del(S)$, quel nombre minimal peut-on obtenir ?
3. Un adversaire a colorié les points, trouvez un algorithme de triangulation (pas Delaunay) qui maximise le nombre d'arêtes rouges. Combien pouvez vous garantir d'en obtenir ?
4. Vous choisissez les couleurs et la triangulation, comment minimier le nombre d'arêtes rouges ? Combien pouvez vous garantir d'en obtenir ?
5. Un adversaire a colorié les points, trouvez un algorithme de triangulation (pas Delaunay) qui minimise le nombre d'arêtes rouges. Combien pouvez vous garantir d'en obtenir ?
6. *(Si vous vous ennuyez)* Comment colorier les points pour minimiser le nombre d'arêtes rouges dans $Del(S)$, quel nombre minimal peut-on obtenir ?

3 Correction:

1. La triangulation de Delaunay a $4n-3$ arêtes dont $2n$ sur l'enveloppe convexe et $2n-3$ internes.

2. Stratégie de coloriage. On commence par colorier les tris sommets d'un triangle en rouge, puis le sommet d'un triangle voisin en rouge, puis encore un triangle voisin en rouge jusqu'à ce que l'on ai colorié n points. On a alors une triangulation de n points rouges avec $2n-3$ arêtes rouges. On colorie les sommets restant en bleu.

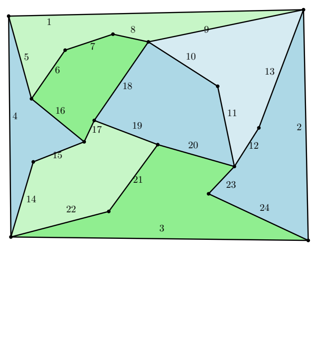
3. Stratégie de triangulation. Trianguler les points rouges, puis ajouter les bleus sans détruire d'arêtes en reliant juste le point à ses deux voisins sur l'enveloppe convexe. On obtient $2n-3$ arêtes rouges.

4. Stratégie de coloriage et triangulation. On colorie un point sur deux le long de l'enveloppe convexe en rouge, On triangule les bleus et on ajoute les rouges. On obtient 2n-3 arêtes bleues, 2n arêtes bicolores et 0 rouges.

5. Stratégie de triangulation. On triangule tous les points bleus, il reste a trianguler des polygones convexes formés de deux points bleus consécutifs et de points rouges, on les triangulent en reliant un point bleu à tous les rouges. De cette manière toutes les arêtes internes de la triangulation sont bleues ou bicolores. Seules les arêtes rouges de l'enveloppe convexe sont rouges dans la triangulation. Le nombre de ces arêtes est entre 0 et $n-1$. On ne peut pas faire mieux puisque les arêtes de l'enveloppe convexe sont forcément dans toute triangulation.

6. Stratégie de coloriage. Une proposition (il y a probablement mieux): On colorie les points en alternant rouge et bleu le long de l'enveloppe, on obtient ainsi au moins $2n$ arêtes bicolores (celles de l'enveloppe convexe), donc au plus $2n-3$ arêtes monocolores. Si il y a plus d'arêtes rouges que de bleues, on échange les couleurs et comme ça on a un maximum de $n-\frac{3}{2}$ arêtes rouges.

4 Mélange d'hexagones et pentagones



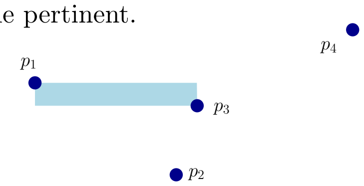
Soit S un ensemble de n points du plan à l'intérieur d'un rectangle. On suppose qu'on nous donne un découpage du rectangle en hexagones et pentagones ayant les points de S comme sommets (comme sur le dessin, les pentagones et hexagones ne sont pas forcément convexes, les sommets du rectangle ne sont pas comptés dans la valeur de n).
Donner des bornes supérieures et inférieures (exactes pas d'ordre de grandeur) sur les nombres h d'hexagones et p de pentagones en fonction de n. On notera a le nombre d'arêtes. Sur le dessin, on a $n=13, p=4, h=4, a=24$.

4 Correction:

Euler: $(n+4)-a+(h+p+1)=2$.
Nombre d'incidences faces-aretes: $2a=6h+5p+4$.
Résolution: $2(n+4)-6h-5p-4+2h+2p+2=4, \qquad 2n+2=4h+3p$
On peut vérifier sur le cas du dessin $2\cdot 13+2=28=4\cdot 4+3\cdot 4$.
Bornes demandées: $0\leq p\leq \frac{2(n+1)}{3}, \qquad 0\leq h\leq \frac{n+1}{2}$.
On peut vérifier facilement qu'avec $n=2$ on coupe le rectangle en deux pentagones et qu'avec $n=3$ on le coupe en deux hexagones.

5 Graphe des rectangles vides

Étant donné un ensemble S de n points du plan, on construit le graphe $R(S)$ des rectangles vides en reliant des points si leur rectangle englobant à cotées parallèles aux axes ne contient pas d'autres points. Par exemple sur la figure ci contre, A et B sont voisins car le rectangle bleu est vide. Par taille de $R(S)$ on désignera son nombre d'arêtes. On pourra noter les points p_i pour $1 \leq i \leq n$ et supposer les points numérotés par ordre croissant en x ($x_i < x_{i+1}$). On pourra donner une taille exacte ou seulement un odre de grandeur selon ce qui vous semble pertinent.



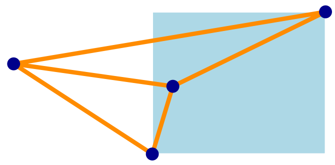
5.1 Dessiner le graphe $R(S)$ sur la feuille jointe.

5.2 Quelle est la taille minimale de $R(S)$?

5.3 Quelle est la taille maximale de $R(S)$?

5.4 Taille moyenne

On suppose que les points sont tirés aléatoirement dans un carré (à cotés parallèles aux axes). Quelle est la taille moyenne de $R(S)$?



5 Correction:

5.1 Graphe de la figure

5.2 Taille minimale

p_i est toujours voisin de p_{i+1} (et p_{i-1}) dans $R(S)$ car le rectangle défini par p_i et p_{i+1} est inclus dans la bande $x_i \leq x_{i+1}$ qui est vide puisque les points sont triés en x.

Si les y_i sont croissants, p_i est voisin seulement de p_{i+1} et p_{i-1}. En effet le rectangle p_ip_j avec $i+1 < j$ est $[x_i, x_j] \times [y_i, y_j]$ et contient $p_i + 1$. p_i n'est pas voisin de p_j. Dans ce cas le nombre d'arêtes est exactement $n-1$. La complexité minimale est linéaire.

5.3 Taille maximale

Si $\forall i, x_i = i$; $\forall i \leq \frac{n}{2}, y_i = i$; $\forall i > \frac{n}{2}, y_i = i - n$ alors les rectangles définis par p_ip_j pour $i \leq \frac{n}{2} < j$ sont vides et on a au moins $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ arêtes dans $R(S)$. Bien évdemment, on ne peut pas avoir plus d'arêtes que les $\frac{n^2}{2}$ paires de points. La complexité dans la cas le pire est quadratique.

5.4 Taille moyenne

Considérons les deux points p_i et p_{i+k}. Le rectangle associé sera vide si quand on considère l'ordre des $k+1$ points p_j pour $i \leq j \leq i+k$ selon la coordonnées y les deux points sont consécutifs. Or cet ordre est juste un orde aléatoire parmi les $k!$ ordres possibles.

p_i a une probabilité $\frac{1}{k+1}$ d'être le plus petit et p_{i+k} une probabilité $\frac{1}{k+1}$ d'être immédiatement supérieur.

p_i a une probabilité $\frac{1}{k+1}$ d'être le plus grand et p_{i+k} une probabilité $\frac{1}{k+1}$ d'être immédiatement inférieur.

p_i a une probabilité $\frac{k-1}{k+1}$ de ne pas être extrémal et p_{i+k} une probabilité $\frac{2}{k+1}$ d'être immédiatement supérieur ou inférieur.

La probabilité que p_ip_{i+k} soit une arête est donc $\frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{2}{k+1} = \frac{k}{(k+1)^2} < \frac{1}{k+1}$

Le nombre d'arêtes est donc $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \mathbb{P}\left[p_ip_{i+k} \text{ est une arête}\right]$ soit

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{k}{(k+1)^2} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{1}{(k+1)} < \sum_{i=1}^{n-1} \log(n-i) < \sum_{i=1}^{n-1} \log n < n \log n$$

On a facilement une borne inférieure en $\Omega(n \log n)$ en remarquant que $\frac{k}{(k+1)^2} \geq \frac{1}{k+3}$