Examen : géométrie algorithmique

ARAVIS

9 à 12h, 15 novembre 1995

1 Sequence de Davenport Schinzel

Dans cet exercice, il faut chercher les constantes exactes (sinon la fin ne marche pas)

Soit M une sequence de Davenport Schinzel d'ordre 3 sur un alphabet à n lettres $\mathcal{A}$ de longueur maximale $\lambda_3(n)$.

On a vu en cours que $\lambda_3(n) = \Theta(n\alpha(n))$ nous allons montrer ici un résultat plus faible, c'est à dire établir une majoration plus grossière de $\lambda_3(n)$. (La majoration souhaitée est $O(n \log n)$, mais à défaut, toute preuve juste d'une majoration encore moins bonne sera lue).

On note ν_i le nombre de fois où la lettre $i \in \mathcal{A}$ apparait dans le mot M.

• Majorer $|M|$, la longueur de M, en fonction de ν_i et de $\lambda_3(n-1)$ pour une lettre i quelconque de $\mathcal{A}$. (Supprimer de M la lettre i, déduire une séquence de Davenport Schinzel à $n-1$ lettres et étudier la différence des longueurs de ces deux séquences).

• La majoration précédente est valable pour toutes les lettres de $\mathcal{A}$. Déduire de ces n inégalités une majoration de $\lambda_3(n)$ en fonction de $\lambda_3(n-1)$.

• Résoudre par récurrence.

2 Optimalité de la triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay maximise le plus petit angle.

• Décrire un exemple prouvant que la triangulation de Delaunay ne minimise pas le plus grand angle (quatre points suffisent).

• Décrire un exemple prouvant que la triangulation de Delaunay ne minimise pas la longueur totale des arêtes de la triangulation.

3 Enveloppe inférieure de segments

La taille d'une enveloppe inférieure de segments est $\Theta(n\alpha(n))$ et l'algorithme vu en cours calcule cette enveloppe en temps $O(n\alpha(n)\log n)$. Nous allons développer dans cet exercice un algorithme de complexité optimale $\Theta(n \log n)$.

• Etudier le problème du calcul de l'enveloppe inférieure de n segments coupant la droite verticale $x = 0$. (Taille de l'enveloppe, algorithme, temps de calcul).

• Etant donné n segments (quelconques). On note $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$ les abcisses des extrémités des segments. On construit un arbre binaire équilibré tel que la racine correspond à l'intervalle $[x_1, x_{2n}]$ et les fils de $[x_i, x_j]$ sont $[x_i, x_k]$ et $[x_k, x_j]$ avec $k = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$ Les feuilles de l'arbre correspondent aux intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

Chaque segment est stocké dans le nœud de l'arbre correspondant au plus petit intervalle le contenant.

Utiliser la structure décrite ci dessus pour calculer l'enveloppe inférieure des n segments en temps optimal. On calculera d'abord des enveloppes inférieures avec l'algorithme de la question précédente. Ensuite on les regroupera en $O(\log n)$ paquets dont on calculera l'enveloppe inférieure facilement. Pour finir, on fusionnera ensuite ces $O(\log n)$ enveloppes par l'algorithme division-fusion classique.

Détailler l'algorithme et étudier sa complexité.

4 Boules

4.1 Intersection de boules de même rayon

On regarde l'intersection de n boules **de même rayon** en dimension 3.

• Soit F une face de l'intersection appartenant au bord d'une boule B de centre c, p un point de F et q un point du bord de l'intersection des boules sur le bord de B

– En regardant le plan passant par p, q et c montrer que $q \in F$. En déduire qu'une boule ne contribue qu'à une seule face de l'intersection.

• Quelle est la taille (nombre de sommets, arêtes et faces) de l'intersection? *(majoration à une constante près)* Cette borne est-elle exacte? *(si oui, exhiber un exemple permettant d'atteindre la taille annoncée)*

4.2 Intersection de boules de rayons différents

On regarde l'intersection de n boules de rayons quelconques en dimension 3.

• Soit B une des boules, dans un premier temps on ne regarde que ce qui se passe sur le bord de B. Les $n-1$ boules différentes de B coupent B en des «disques» tracés sur B. Quelle est la taille de l'intersection de ces disques?

• Quelle est la taille (nombre de sommets, arêtes et faces) de l'intersection? *(majoration à une constante près)*

$\star\star\star$ Cette borne est-elle exacte? *(si oui, exhiber un exemple permettant d'atteindre la taille annoncée)*

4.3 Union de boules

• Quelle est la taille de l'union de n sphères (rayons différents)? Cette borne est-elle exacte? Que se passe-t-il si les rayons sont identiques?