Examen DEA ARAVIS : géométrie algorithmique
14 à 17h, 7 novembre 1996

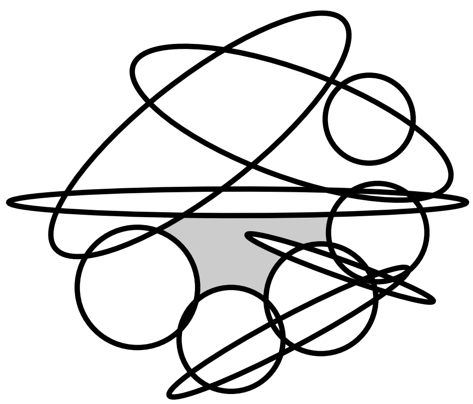
Complément

Ceci n'est pas une question, mais un théorème qui peut servir par la suite !

Le *set disjointness problem*, consiste étant donné deux ensembles A et B de n nombres réels chacun, à décider si $A \cap B = \emptyset$.

Théorème: Le *set disjointness problem* nécéssite un temps minimal de $\Omega(n \log n)$.

1 Arrangement d'ellipses



On appelle complexité d'un objet le nombre total d'éléments qui le composent, nombre de faces, nombre d'arêtes, nombres de sommets.

Étant donné un arrangement d'ellipses dans le plan,

- Quel est la complexité de tout l'arrangement ?
- Quel est la complexité d'une seule cellule ?

2 Enveloppe convexe

$S = \{p_1 \ldots p_n,\ n$ points du plan **triés** en $x\}$
E est une liste circulaire doublement chaînée,
$pred_E(q)$ et $succ_E(q)$ sont les successeurs et predecesseurs de q dans E.

Algorithme:

si $(p_1, p_2, p_3$ tourne à gauche)
    E =liste p_1, p_2, p_3
sinon E =liste p_2, p_1, p_3
fin si
$i = 3$
$S = S \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$
tant que $(i < n)$
    $S = S \setminus \{p_{i+1}\}$
    $q = p_i$
    tant que $(pred_E(q), q, p_{i+1}$ tourne à droite)

$q = pred_E(q)$
fin tant que
$r = p_i$
tant que $(succ_E(r), r, p_{i+1}$ tourne à gauche)
$r = succ_E(r)$
fin tant que
$E = E$ en substituant la chaine de q à r par q, p_{i+1}, r
$i = i + 1$
fin tant que

- Que calcule cet algorithme?
- Étudier sa complexité.
- Modifier cet algorithme pour tracer une triangulation de S.

3 Arbre couvrant minimal

Soient deux ensembles de points du plan qu'on appellera les points bleus et les points rouges. La plus proche paire bicolore est constituée d'un point bleu et d'un point rouge telle que la distance entre les deux points soit minimale.

Étant donné un ensemble de points du plan, l'arbre couvrant de longueur minimale est un arbre (ensemble d'arêtes reliant des paires de points, sans cycle et connexe) tel que la longueur de l'arbre soit minimale parmi tous les arbres possibles.

- Étudier la borne inférieure du problème du calcul de la plus proche paire bicolore.
- Proposer un algorithme de calcul de la plus proche paire bicolore et étudier sa complexité.
- Montrer que la plus proche paire bicolore fait partie de l'arbre couvrant minimal des points bleus et rouges.
- Montrer que l'arbre couvrant minimal est inclus dans la triangulation de Delaunay.
- Étudier la borne inférieure du problème du calcul de l'arbre couvrant minimal.
- Proposer un algorithme de calcul de l'arbre couvrant minimal et étudier sa complexité.

4 Dominance

Soient p et q deux points du plan, on dit que p domine q si et seulement si $x_p > x_q$ et $y_p > y_q$ (on note $p \succ q$).

Soient deux ensembles de points du plan: B un ensemble de n points bleus et R un ensemble de m les points rouges.

On cherche l'ensemble $\{(p, q); p \in B, q \in R, p \succ q\}$.

Étudier le problème, (borne inférieure, algorithme, complexité).